11) *Lösung.* Da $\ell(ww) = 2\ell(w)$ ist $\ell(ww)$ gerade. Wir zeigen „w Palindrom $\Rightarrow ww$ Palindrom" über die induktive Definition.

- Basis ($w = \epsilon$): Dann ist $ww = \epsilon$ und somit ein Palindrom.
- Basis ($w = e$, $e \in \Sigma$): Dann ist ee ein Palindrom.
- Schritt ($w = eve$, $e \in \Sigma$): Dann ist $ww = eveeve$. Weil w ein Palindrom ist, ist v ein Palindrom, also gilt $v = \mathsf{rev}(v)$. Weiters ist $veev = vee\mathsf{rev}(v) = ve\mathsf{rev}(ve)$ ein Palindrom und somit auch $eveeve$.

□

12) *Lösung.* Bei Nummerierung der Ecken nach dem Alphabet ist die Adjazenzmatrix von R

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der Algorithmus von Warshall liefert die Adjazenzmatrix von T :

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $M^2 \setminus T = \varnothing$. □

13) *Lösung.* Der Graph G ist vollständig und hat die folgende Kantenmenge (in einer möglichen Sortierung):

$$\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{b,f\},$$
$$\{c,d\},\{c,e\},\{c,f\},\{d,e\},\{d,f\},\{e,f\}\} .$$

Basierend auf dieser Vorsortierung erhalten wir die folgende Tabelle, deren rechteste

Spalte wir sukzessive von oben nach unten ausrechnen können.

$r(k)$	$P = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,b\}$	$P = \{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,c\}$	$P = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,d\}$	$P = \{\{a,b,c,d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,e\}$	$P = \{\{a,b,c,d,e\},\{f\}\}$
$\{a,f\}$	$P = \{a,b,c,d,e,f\}$
	$\vdots$

Somit gilt:

$$P = \{\{a,b,c,d,e,f\}\}$$
$$W = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f)\}\ ,$$

und die Kantenmenge W definiert einen (nicht eindeutigen) spannenden Baum. □

14) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 117$ und $b = 91$ liefert:

q	A	B
	$(117, 1, 0)$	$(91, 0, 1)$
1	$(91, 0, 1)$	$(26, 1, -1)$
3	$(26, 1, -1)$	$(13, -3, 4)$

Somit sind $d = 13$, $u = 4$ und $v = -3$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 91 und 117 ist

$$117 \cdot \frac{91}{13} = 117 \cdot 7 = 819\ .$$

□

15) *Lösung.* Zunächst entfernen wir die unerreichbaren Zustände 7, 8, 9 und 10. Dann wenden wir den Markierungsalgorithmus an, um die folgende Tabelle zu erhalten:

	1	2	3	4	5
2	✓				
3		✓			
4	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓

Aus dieser Tabelle kann der folgende minimale Automat generiert werden (mit der Zustandsmenge $\{\{5\},\{6\},\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$).

	a	b
$\rightarrow \{5\}*$	$\{1,3\}$	$\{6\}$
$\{6\}*$	$\{6\}$	$\{6\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
$\{4\}$	$\{6\}$	$\{2\}$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathtt{1}^n\mathtt{0}\mathtt{1}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathtt{1}^i$, $y = \mathtt{1}^j$ und $z = \mathtt{1}^{n-i-j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, zum Beispiel für $k = 2$:

$$xy^kz = \mathtt{1}^i(\mathtt{1}^j)^2\mathtt{1}^{n-i-j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n = \mathtt{1}^{n+j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n \notin L\ ,$$

da $j > 0$. Somit ist L nicht regulär. □