11) *Lösung.* Basis: $(x, y) = (0, 0)$
$0 \leq 2 \cdot 0$

Schritt: Induktionshypothese: $m \leq 2n$

- $(x, y) = (m, n+1)$:
  $x = m \overset{IH}{\leq} 2n < 2(n+1) = 2y$.
- $(x, y) = (m+1, n+1)$:
  $x = m+1 \overset{IH}{\leq} 2n+1 < 2n+2 = 2(n+1) = 2y$.
- $(x, y) = (m+2, n+1)$:
  $x = m+2 \overset{IH}{\leq} 2n+2 = 2(n+1)$.

□

12) *Lösung.* G ist kein Wurzelbaum. Der Algorithmus von Floyd liefert die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & \infty \\ -3 & 1 & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

□

13) *Lösung.*

A	B	*Quotient*
$(53, 1, 0)$	$(7, 0, 1)$	7
$(7, 0, 1)$	$(4, 1, -7)$	1
$(4, 1, -7)$	$(3, -1, 8)$	1
$(3, -1, 8)$	$(1, 2, -15)$	3

Damit erhalten wir $u = -2$, $v = 15$ und $t = u \cdot a + v \cdot b = 1$. □

14) *Lösung.* **a.** Seien p und q positive ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$, und seien a und b beliebige ganze Zahlen. Dann hat das Kongruenzensystem

$$x \equiv_p a$$
$$x \equiv_q b$$

die eindeutige Lösung

$$x \equiv_{pq} vqa + upb\,,$$

wobei die ganzen Zahlen u und v mit

$$up + vq = 1$$

durch den erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet werden können.

b. Wir *sehen*, dass $-1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 1$. (Alternativ kann man das natürlich auch mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen). Wir wählen also $a = 0$, $p = 7$, $b = 3$, $q = 8$, $u = -1$ und $v = 1$ im Chinesischen Restsatz (siehe oben) und erhalten $x = 1 \cdot 8 \cdot 0 + -1 \cdot 7 \cdot 3 = 35 \bmod 56$ als Lösung für das erste Kongruenzsystem. Für das zweite Kongruenzsystem müssen wir nur den Wert von b zu 6 ändern und erhalten $y = -42 = 14 \bmod 56$.

Wir überprüfen unsere Lösungen. Für das erste Kongruenzsystem: $35 = 5{\cdot}7 = 0 \bmod 7$ and $35 = 4 \cdot 8 + 3 = 3 \bmod 7$. Für das zweite Kongruenzsystem: $14 = 2 \cdot 7 = 0 \bmod 7$ and $14 = 1 \cdot 8 + 6 = 6 \bmod 8$.

c. Wir haben $35 + 35 = 70 = 1 \cdot 56 + 14 = 14 \bmod 56$ und können daraus tatsächlich $x + x = y \bmod 7$ und $x + x = y \bmod 8$ schließen, da aus $c = d \bmod w \cdot z$ folgt, dass $c = d \bmod w$.
(Wenn $c - d$ ein Vielfasches von $w \cdot z$ ist, dann auch von w.)

□

15) *Lösung.* Der NEA N mit folgender Zustandstabelle:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_2	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*q_3$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Der DEA N' mit folgender Zustandstabelle:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_0, q_1	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_0, q_1, q_2	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*q_0, q_1, q_2, q_3$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^2\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n+j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n+j)+0 \nleqslant n$. Somit ist L nicht regulär. $\square$