11) *Lösung.* Basis: $(x, y) = (0, 0)$
$2 \cdot 0 \geq 0$

Schritt: Induktionshypothese: $2m \geq n$

- $(x, y) = (m + 1, n)$:
  $2x = 2(m + 1) = 2m + 2 \overset{IH}{\geq} n + 2 > n = y.$
- $(x, y) = (m + 1, n + 1)$:
  $2x = 2(m + 1) = 2m + 2 \overset{IH}{\geq} n + 2 > n + 1 = y.$
- $(x, y) = (m + 1, n + 2)$:
  $2x = 2(m + 1) = 2m + 2 \overset{IH}{\geq} n + 2 = y.$

□

12) *Lösung.* G ist kein Wurzelbaum. Der Algorithmus von Floyd liefert die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -1 & \infty \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -1 & \infty \\ 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & \infty & -3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -1 & \infty \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & \infty & -3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -1 & \infty \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

13) Zuerst berechnen wir $\mathrm{ggT}(a, b)$:

A	*B*	*Quotient*
$(36, 1, 0)$	$(66, 0, 1)$	0
$(66, 0, 1)$	$(36, 1, 0)$	1
$(36, 1, 0)$	$(30, -1, 1)$	1
$(30, -1, 1)$	$(6, 2, -1)$	5

Damit erhalten wir $\mathrm{ggT}(a,b) = 6$. Nun gilt $\mathrm{kgV}(a,b) = \frac{|a|\cdot|b|}{\mathrm{ggT}(a,b)} = 396$.

14) **a.** Seien p und q positive ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$, und seien a und b beliebige ganze Zahlen. Dann hat das Kongruenzensystem

$$x \equiv_p a$$
$$x \equiv_q b$$

die eindeutige Lösung

$$x \equiv_{pq} vqa + upb\,,$$

wobei die ganzen Zahlen u und v mit

$$up + vq = 1$$

durch den erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet werden können.

b. Wir *sehen*, dass $-1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 1$. (Alternativ kann man das natürlich auch mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen). Wir wählen also $a = 5$, $p = 7$, $b = 2$, $q = 8$, $u = -1$ und $v = 1$ im Chinesischen Restsatz (siehe oben) und erhalten $x = 1 \cdot 8 \cdot 5 + -1 \cdot 7 \cdot 2 = 26 \bmod 56$ als Lösung für das erste Kongruenzsystem. Für das zweite Kongruenzsystem müssen wir nur die Werte von a und b zu 3 bzw. 4 ändern und erhalten $y = -4 = 52 \bmod 56$.

Wir überprüfen unsere Lösungen. Für das erste Kongruenzsystem: $26 = 3\cdot 7 + 5 = 5 \bmod 7$ und $26 = 3 \cdot 8 + 2 = 2 \bmod 7$. Für das zweite Kongruenzsystem: $52 = 7 \cdot 7 = 3 \bmod 7$ und $52 = 6 \cdot 8 + 4 = 4 \bmod 8$.

c. Das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} x &= 2 \bmod 4 \\ x &= 3 \bmod 6 \end{aligned}$$

hat keine Lösung. Wenn es eine Lösung hätte, dann müsste auch

$$\begin{aligned} x &= 2 \bmod 2 \\ x &= 3 \bmod 2 \end{aligned}$$

eine Lösung haben.
(Allgemein: Wenn $c = d \bmod w \cdot z$, dann $c = d \bmod w$, denn wenn $c - d$ ein Vielfaches von $w \cdot z$ ist, dann auch von w).
$x = 0 \bmod 2$ und $x = 1 \bmod 2$ können aber nicht beide gelten (eine Zahl kann nicht gleichzeitig gerade und ungerade sein).

Dies widerspricht nicht dem Chinesischen Restsatz, da die Zahlen 4 und 6, p und q im Satz, nicht teilerfremd sind, $\mathrm{ggT}(4,6) = 2 \neq 1$.

15) *Lösung.* Der NEA N mit folgender Zustandstabelle:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\varnothing$
$\rightarrow q_1$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
$\rightarrow *q_3$	$\varnothing$	$\varnothing$

Der DEA N' mit folgender Zustandstabelle:

	0	1
$\rightarrow *q_0, q_1, q_3$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
$*q_1, q_2, q_3$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
$*q_1, q_3$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$

$\square$

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n \mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n \mathsf{b}^0 \mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 0$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^0\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n-j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n - j) + 0 \ngeqslant n$. Somit ist L nicht regulär. $\square$