1. Welche der folgenden Aussagen zum Halteproblem ist richtig?

A. Jedes Problem ist auf das Halteproblem reduzierbar.

B. MP, das Zugehörigkeitsproblem, kann nicht von einer universellen Turingmaschine akzeptiert werden.

C. HP ist die einzige Sprache, die rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv ist.

D. Das Halteproblem ist ein unentscheidbares und nicht semi-entscheidbares Problem.

E. Das Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen und regulären Sprachen ist richtig?

A. Turingmaschinen mit einem zweiseitig unendlichen Band ist echt ausdrucksstärker als eine 1-Band Turingmaschinen, mit rechtseitig unendlichem Band.

B. Um eine nichtdeterministische Turingmaschine in eine deterministische umzuwandeln, wenden wir die Teilmengenkonstruktion an.

C. Bei einer Turingmaschine, die einen DEA simuliert, bewegen sich die Leseköpfe immer in unterschiedliche Richtungen.

D. Die Klasse der Sprachen, die von einer 1-Band-Turingmaschine akzeptiert werden, ist echt kleiner als die Klasse der Sprachen, die von einer 3-Band-Turingmaschine akzeptiert werden.

E. Jeder ϵ-NEA kann in eine deterministische Turingmaschine umgewandelt werden.

---

3. Welches der folgenden Gesetze über reguläre Ausdrücke gilt im Allgemeinen nicht? (Hierbei bezeichnen D, E, F reguläre Ausdrücke und wir schreiben abkürzend $E \equiv F$, wenn $L(E) = L(F)$.)

A. $E\varnothing \equiv \varnothing$.

B. $(\epsilon)^* \equiv \epsilon$.

C. $((E + F)D) \equiv (ED + FD)$.

D. $(F(DE)) \equiv ((FD)E)$.

E. $(E + F) \equiv (F + E)$.

F. $(D(E + F)) \equiv (DE + FD)$.

---

4. Welche der folgenden Sprachen (über dem Alphabet $\{a, b\}$) ist regulär?

A. $\{a^i b^j \mid i \geqslant 0, j \geqslant 0, i \neq j\}$.

B. $\{w \mid w \in L(a^*)$ und die Länge von w ist eine Primzahl$\}$.

C. $\{w \mid w \in L((a^* b^*)^*)$ und w enthält ungleich viele a's wie b's$\}$.

D. $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

E. $\{x \mid x$ enthält eine gerade Anzahl von a's und eine ungerade Anzahl von b's$\}$.

---

5. Sei n eine positive ganze Zahl und sei a eine ganze Zahl ungleich null. Welches der folgenden Kriterien ist äquivalent zur Invertierbarkeit der Restklasse von a modulo n ?

A. n ist eine Primzahl.

B. a ist eine Primzahl.

C. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und n ist gleich dem Maximum von a und n .

D. Der größte gemeinsame Teiler von a und n ist ungleich 1 .

E. Der größte gemeinsame Teiler von a und n ist 1 .

---

6. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ injektive Abbildungen. Was besagt der Satz von Bernstein ?

A. Die Hintereinanderausführung von g nach f ist injektiv.

B. Die Hintereinanderausführung von f nach g ist injektiv.

C. Die Hintereinanderausführung von g nach f ist bijektiv.

D. Die Hintereinanderausführung von f nach g ist bijektiv.

E. Es existiert eine bijektive Abbildung von M nach N.

---

7. Wieviele Funktionen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^2$ gibt es, die bijektiv sind ?

A. 36

B. 64

C. 16

D. 256

E. 24

---

8. Für welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist der Graph von R ein Wurzelbaum ?

A. $\{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$

B. $\{(4, 5), (4, 2), (6, 3), (6, 4)\}$

C. $\{(6, 4), (4, 5), (4, 2), (6, 3), (5, 2), (3, 1)\}$

D. $\{(4, 2), (6, 3), (4, 5), (3, 1), (6, 4), (5, 3)\}$

E. $\{(6, 3), (6, 4), (4, 5), (1, 3), (4, 2)\}$

F. $\{(4, 5), (3, 1), (4, 2), (6, 3), (6, 4)\}$

---

9. Sei $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung $\leqslant$ und $\mathbb{N}^2$ mit der komponentenweisen Ordnung über $\leqslant$ versehen. Wieviele unmittelbare Vorgänger hat das Paar $(2, 2)$ in $\mathbb{N}^2$?

A. 0

B. 9

C. 8

D. 1

E. 2

---

10. Seien f und g Funktionen von natürlichen Zahlen, die positive reelle Werte annehmen. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage $f \in \mathrm{o}(g)$?

A. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

B. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

C. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} > 0$

D. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty$

E. $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

---

11. Betrachten Sie die folgende induktiv definierte Menge S über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

Basis: $(0,0) \in S$

Schritt:
- Wenn $(x,y) \in S$, dann ist $(x, y+1) \in S$.
- Wenn $(x,y) \in S$, dann ist $(x+1, y+1) \in S$.
- Wenn $(x,y) \in S$, dann ist $(x+2, y+1) \in S$.

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion: Für alle $(x,y) \in S$ gilt $x \leq 2y$.

---

12. Gegeben ein gerichteter Graph G durch die Relation

$$\{(a,b),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d),(d,e)\}$$

auf $M = \{a,b,c,d,e\}$ und Kantenbewertung

$$\begin{aligned} b((a,b)) &= 2, & b((a,e)) &= 2, \\ b((b,a)) &= -1, & b((b,c)) &= 5, \\ b((c,a)) &= -3, & b((c,b)) &= 1, \\ b((c,d)) &= 6, & b((d,c)) &= 1, \\ b((d,d)) &= 1, & b((d,e)) &= 3. \end{aligned}$$

Ist G ein Wurzelbaum? Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd-Warshall die Eckenabstände im Graphen G.

---

13. Berechnen Sie mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus aus der Vorlesung den größten gemeinsamen Teiler t von $a = -53$ und $b = -7$, sowie ganze Zahlen u und v, sodass $u \cdot a + v \cdot b = t$. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte (also die Inhalte der Tripel A und B aus dem Algorithmus) an.

14.

a. Was besagt der chinesische Restsatz?

b. Betrachten Sie die Kongruenzensysteme

$$x = 0(\mathrm{mod} 7)$$
$$x = 3(\mathrm{mod} 8)$$

und

$$y = 0(\mathrm{mod} 7)$$
$$y = 6(\mathrm{mod} 8)$$

Zeigen Sie dass diese Kongruenzensysteme mit Hilfe des chinesischen Restsatzes gelöst werden können und geben Sie die entsprechenden Rechenschritte welche in Lösungen für x und y resultieren. Zeigen Sie außerdem dass die berechneten Lösungen tatsächlich beide Kongruenzensysteme erfüllen.

c. Um das Ergebnis aus **b.** zu kontrollieren, können wir auch nachprüfen, dass $x + x = y(\mathrm{mod} 56)$.
Können wir daraus weiterhin schließen, dass $x + x = y(\mathrm{mod} 7)$ und $x + x = y(\mathrm{mod}\ 8)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

15. Betrachten Sie den ϵ-NEA N mit folgender Zustandstabelle:

	0	1	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\varnothing$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
$*q_3$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$

Konstruieren Sie einen DEA N', der dieselbe Sprache wie N akzeptiert.

---

16. Beweisen Sie mit Hilfe der Kontraposition des Pumping Lemmas dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid \text{wobei } i \geqslant 0,\ j \geqslant 0 \text{ und } i + j \leqslant k\} \quad ,$$

nicht regulär ist.

ANSWERKEY FOR “versionG”

Version 1: E E F E E E E F E E