11) *Lösung.*
Wir zeigen „für all $f, g \in \mathbb{B}[x] \Rightarrow f \circ g \in \mathbb{B}[x]$" über die induktive Definition von f

- Basis ($f = 0$ oder $f = 1$): Hier sind 0, 1 konstante Funktionen, also ist auch die Komposition $f \circ g$ die konstante Funktion $0, 1$ und somit in $\mathbb{B}[x]$.
- Basis ($f = xf_1$ oder $f = f_1 + f_2$): Hier sind f_1, f_2 Polynome in $\mathbb{B}[x]$. Nach Induktionshypothese folgt, dass $f_1 \circ g, f_2 \circ g \in \mathbb{B}[x]$. Wir betrachten zunächst den ersten Teilfall, also $f = xf_1$. Wir erhalten:

$$f \circ g = (xf_1) \circ g = x(f_1 \circ g) \in \mathbb{B}[x] \, .$$

  Im letzten Schritt verwenden wir die Induktionshypothese, sowie die induktive Definition des Polynomrings $\mathbb{B}[x]$. Im zweiten Teilfall ($f = f_1 + f_2$) erhalten wir analog:

$$f \circ g = (f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g) \in \mathbb{B}[x] \, .$$

□

12) *Lösung.*
G ist kein Wurzelbaum. Der Algorithmus von Floyd-Warshall liefert die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & \infty \\ -3 & 1 & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 5 & \infty & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 13 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 11 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

□

13) *Lösung.*

A	B	*Quotient*
$(53,1,0)$	$(7,0,1)$	7
$(7,0,1)$	$(4,1,-7)$	1
$(4,1,-7)$	$(3,-1,8)$	1
$(3,-1,8)$	$(1,2,-15)$	3

Damit erhalten wir $u = -2$, $v = 15$ und $t = u \cdot a + v \cdot b = 1$. □

14) *Lösung.* Elimination der ϵ-Übergänge in N und anschließende Teilmengenkonstruktion liefert den folgenden deterministischen endlichen Automaten:

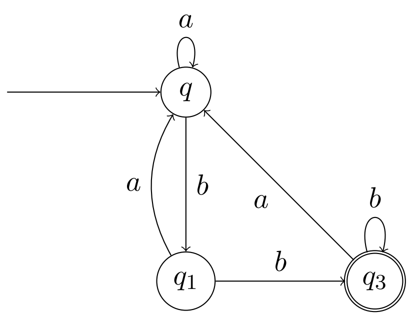
	a	b
$\rightarrow *\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\varnothing$
$*\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$*\{2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

□

15) *Lösung.* Die Anwendung des Table-filling-Algorithmus auf A liefert:

q_0			
$\checkmark$	q_1		
	$\checkmark$	q_2	
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_3

Die Zustände q_0 und q_2 können also zu einem Zustand zusammengefasst werden, den wir q nennen. Das Ergebnis ist dann der folgende DEA:



□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^2\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n+j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n+j)+0 \nleqslant n$. Somit ist L nicht regulär. □