11) *Lösung.* BASIS ($L = \texttt{[]}$). Dann gilt $L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = \texttt{[]} \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = \texttt{[]}$ auf Grund der ersten Gleichung in der Definition von ++.

SCHRITT ($L = x : L_1$). Laut Induktionshypothese (IH) gilt $L_1 \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = L_1$. Wir zeigen $L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = L$ wie folgt:

$$\begin{aligned} L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} &= (x : L_1) \mathbin{+\!+} \texttt{[]} \\ &= x : (\underline{L_1 \mathbin{+\!+} \texttt{[]}}) && \text{(Definition von ++)} \\ &= x : L_1 && \text{(IH)} \\ &= L \end{aligned}$$ □

12) *Lösung.* Bei Nummerierung der Ecken nach dem Alphabet ist die Adjazenzmatrix von R;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Algorithmus von Warshall liefert die transitive Hülle.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die transitive Hülle T der Relation R geben durch: $\{a, b, c, d\}^2$. □

13) *Lösung.* Die Siebformel für drei Mengen lautet:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)\,.$$

Für die einzelnen Komponenten haben wir:

$$\begin{aligned}
\#A &= 7 \\
\#B &= 7 \\
\#C &= 5 && \text{da } \#A = 7 \text{ und } \#(A \cup C) = 10, \#(A \cap C) = 2 \\
\#(A \cap B) &= 2 && \text{da } \#A = 7 \text{ und } \#(A \setminus B) = 5 \\
\#(B \cap C) &= 3 \\
\#(A \cap C) &= 2 \\
\#(A \cap B \cap C) &= 2
\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir $\#(A \cup B \cup C) = 14$. □

14) *Lösung.* **a.** Seien p und q positive ganze Zahlen mit $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$, und seien a und b beliebige ganze Zahlen. Dann hat das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned}
x &\equiv_p a \\
x &\equiv_q b
\end{aligned}$$

die eindeutige Lösung

$$x \equiv_{pq} vqa + upb\,,$$

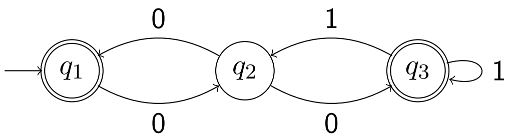
wobei die ganzen Zahlen u und v mit

$$up + vq = 1$$

durch den erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet werden können.

b. Wir wählen $p = 5$, $q = 7$, $a = 2$ und $b = 5$ für das Kongruenzensystem des chinesischen Restsatzes. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus erhalten wir außerdem $u \cdot p + v \cdot q = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7 = 1$. Der chinesische Restsatz liefert somit das Ergebnis $x \equiv_{5 \cdot 7} vqa + upb \equiv_{35} 47$. Also besteht der Haufen aus mindestens 12 Ästen. □

15) *Lösung.* Der folgende NEA akzeptiert die Sprache $\epsilon + \mathsf{0}(\mathsf{01}^*\mathsf{1} + \mathsf{00})^*\mathsf{01}^*$.



□

16) *Lösung.* Sei n beliebig und wähle das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}\mathsf{a}^n \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$. Nun seien x, y, z Teilwörter von w, sodass $w = xyz$ und $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$. Somit kann (bei allen möglichen Formen von x, y und z) nur gelten, dass $x = \mathsf{a}^l$, $y = \mathsf{a}^m$

und $z = \mathsf{a}^{n-m-l}\mathsf{ca}^n$, wobei $1 \leqslant m$ und $m + l \leqslant n$. Schließlich wählen wir $k = 0$ und betrachten das Wort $w' = \mathsf{a}^l\mathsf{a}^{n-m-l}\mathsf{ca}^n$. Wie leicht zu sehen ist gilt $w \notin L$. (Beachten Sie dass $m \neq 0$.)

Somit haben wir alle Voraussetzungen der Kontraposition des Pumpinglemmas gezeigt und schließen, dass L nicht regulär ist. $\square$