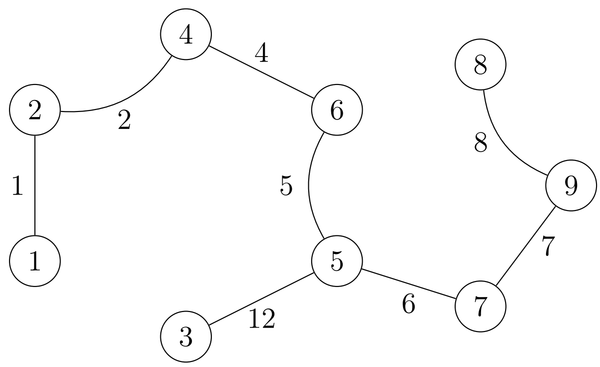
11) *Lösung.* Basis ($L = \texttt{[]}$). Dann gilt $L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = \texttt{[]} \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = \texttt{[]}$ auf Grund der ersten Gleichung in der Definition von ++.

Schritt ($L = x : L_1$). Laut Induktionshypothese (IH) gilt $L_1 \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = L_1$. Wir zeigen $L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} = L$ wie folgt:

$$\begin{aligned} L \mathbin{+\!+} \texttt{[]} &= (x : L_1) \mathbin{+\!+} \texttt{[]} \\ &= x : (\underline{L_1 \mathbin{+\!+} \texttt{[]}}) && \text{(Definition von ++)} \\ &= x : L_1 && \text{(IH)} \\ &= L \end{aligned}$$

□

12) *Lösung.*



In der Verarbeitungsphase werden die nicht-minimalen Kanten 3, 9, 11 und 14 entfernt, die übrigen Kanten werden in aufsteigender Reihenfolge sortiert 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13. Mit Einzelblöcken beginnend verarbeiten wir die Kanten der Reihenfolge nach, was folgendes ergibt:

(Kante 1) Verbindet Blöcke $\{1\}$ und $\{2\}$ resultierend in $\{1, 2\}$;

(Kante 2) Verbindet Blöcke $\{1, 2\}$ und $\{4\}$ resultierend in $\{1, 2, 4\}$;

(Kante 4) Verbindet Blöcke $\{1, 2, 4\}$ und $\{6\}$ resultierend in $\{1, 2, 4, 6\}$;

(Kante 5) Verbindet Blöcke $\{1, 2, 4, 6\}$ und $\{5\}$ resultierend in $\{1, 2, 4, 6, 5\}$;

(Kante 6) Verbindet Blöcke $\{1, 2, 4, 6, 5\}$ und $\{7\}$ resultierend in $\{1, 2, 4, 6, 5, 7\}$;

(Kante 7) Verbindet Blöcke $\{1, 2, 4, 6, 5, 7\}$ und $\{9\}$ resultierend in $\{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9\}$;

(Kante 8) Verbindet Blöcke $\{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9\}$ und $\{8\}$ resultierend in $\{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9, 8\}$;

(Kante 10) Verwerfen, da diese Kante einen Block mit sich selbst verbindet;

(Kante 12) Verbindet Blöcke $\{1,2,4,6,5,7,9,8\}$ und $\{3\}$ resultierend in $\{1,2,4,6,5,7,9,8,3\}$;

(Kante 13) Verwerfen, da diese Kante einen Block mit sich selbst verbindet.

Das Gewicht des Baumes (die nicht verworfenen Kanten) beträgt $1+2+4+5+6+7+8+12=45$. Ein spannender Wald T' mit Gewicht $45+9=54$ kann von T erhalten werden, in dem man die parallelen Kanten in G mit anderen Kanten ersetzt. Das heißt, 2 mit 3, 5 mit 11 und 8 mit 9. Schlussendlich wird Kante 9 durch Kante 10 ersetzt. Somit hat T' die Kantenmenge $\{1,3,4,11,12,6,7,10\}$. $\square$

13) *Lösung.* Die Siebformel für drei Mengen lautet:

$$\#(A\cup B\cup C) = \#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)\,.$$

Für die einzelnen Komponenten haben wir:

$$\begin{aligned}
\#A &= 6 \\
\#B &= 5 \\
\#C &= 3 \\
\#(A\cap B) &= 2 \qquad \text{da } \#A = 6 \text{ und } \#(A\setminus B) = 4 \\
\#(B\cap C) &= 0 \\
\#(A\cap C) &= 2 \\
\#(A\cap B\cap C) &= 0 \qquad \text{da } \#(B\cap C) = 0
\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir $\#(A\cup B\cup C) = 10$. $\square$

14) *Lösung.* **a.** Seien p und q positive ganze Zahlen mit $\operatorname{ggT}(p,q)=1$, und seien a und b beliebige ganze Zahlen. Dann hat das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned}
x &\equiv_p a \\
x &\equiv_q b
\end{aligned}$$

die eindeutige Lösung

$$x \equiv_{pq} vqa + upb\,,$$

wobei die ganzen Zahlen u und v mit

$$up + vq = 1$$

durch den erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet werden können.

b. Wir wählen $p=5$, $q=7$, $a=2$ und $b=5$ für das Kongruenzensystem des chinesischen Restsatzes. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus erhalten wir außerdem $u\cdot p + v\cdot q = 3\cdot 5 + (-2)\cdot 7 = 1$. Der chinesische Restsatz liefert somit das Ergebnis $x \equiv_{5\cdot 7} vqa + upb \equiv_{35} 47$. Also besteht der Haufen aus mindestens 12 Ästen. $\square$

15) *Lösung.* Die Teilmengenkonstruktion liefert folgenden Automaten:

	a	b	c
$\to \{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$*\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$*\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$*\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathtt{1}^n\mathtt{0}\mathtt{1}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathtt{1}^i$, $y = \mathtt{1}^j$ und $z = \mathtt{1}^{n-i-j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, zum Beispiel für $k = 2$:

$$xy^kz = \mathtt{1}^i(\mathtt{1}^j)^2\mathtt{1}^{n-i-j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n = \mathtt{1}^{n+j}\mathtt{0}\mathtt{1}^n \notin L\ ,$$

da $j > 0$. Somit ist L nicht regulär. □