1. Welche der folgenden Aussagen zur Entscheidbarkeit beziehungsweise Unentscheidbarkeit ist richtig?

A. Eine Menge oder ihr Komplement sind rekursiv aufzählbar.

B. Das Zugehörigkeitsproblem (MP) einer Turingmaschine ist entscheidbar.

C. Wenn A rekursiv ist, dann ist $\sim A$ nicht rekursiv aufzählbar.

D. Es gibt eine rekursiv aufzählbare Menge, die nicht rekursiv ist.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen und regulären Sprachen ist richtig?

A. Turingmaschinen mit einem zweiseitig unendlichen Band ist echt ausdrucksstärker als eine 1-Band Turingmaschinen, mit rechtseitig unendlichem Band.

B. Um eine nichtdeterministische Turingmaschine in eine deterministische umzuwandeln, wenden wir die Teilmengenkonstruktion an.

C. Bei einer Turingmaschine, die einen DEA simuliert, bewegen sich die Leseköpfe immer in unterschiedliche Richtungen.

D. Die Klasse der Sprachen, die von einer 1-Band-Turingmaschine akzeptiert werden, ist echt kleiner als die Klasse der Sprachen, die von einer 3-Band-Turingmaschine akzeptiert werden.

E. Jeder ϵ-NEA kann in eine deterministische Turingmaschine umgewandelt werden.

---

3. Welches der folgenden Gesetze über reguläre Ausdrücke gilt im Allgemeinen nicht? (Hierbei bezeichnen D, E, F reguläre Ausdrücke und wir schreiben abkürzend $E \equiv F$, wenn $L(E) = L(F)$.)

A. $E\varnothing \equiv \varnothing$.

B. $(\epsilon)^* \equiv \epsilon$.

C. $((E + F)D) \equiv (ED + FD)$.

D. $(F(DE)) \equiv ((FD)E)$.

E. $(E + F) \equiv (F + E)$.

F. $(D(E + F)) \equiv (DE + FD)$.

---

4. Welche der folgenden Sprachen (über dem Alphabet $\{a, b\}$) ist regulär?

A. $\{a^i b^j \mid i \geqslant 0, j \geqslant 0, i \neq j\}$.

B. $\{w \mid w \in L(a^*)$ und die Länge von w ist eine Primzahl$\}$.

C. $\{w \mid w \in L((a^* b^*)^*)$ und w enthält ungleich viele a's wie b's$\}$.

D. $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

E. $\{x \mid x$ enthält eine gerade Anzahl von a's und eine ungerade Anzahl von b's$\}$.

---

5. Wozu dient der chinesische Restsatz?

A. zur Lösung keines der angeführten Berechnungsprobleme

B. zum schnellen Potenzieren von Restklassen

C. zum Ziehen von Quadratwurzeln aus Restklassen

D. zum Invertieren von Restklassen

E. zum Lösen eines Kongruenzensystems

---

6. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ injektive Abbildungen. Was besagt der Satz von Bernstein?

A. Die Hintereinanderausführung von g nach f ist injektiv.

B. Die Hintereinanderausführung von f nach g ist injektiv.

C. Die Hintereinanderausführung von g nach f ist bijektiv.

D. Die Hintereinanderausführung von f nach g ist bijektiv.

E. Es existiert eine bijektive Abbildung von M nach N.

---

7. Wieviele Funktionen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^2$ gibt es?

A. 128

B. 64

C. 16

D. 24

E. 256

---

8. Ein Computer verarbeitet Jobs einen nach dem anderen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Reihenfolge von sieben Jobs festzulegen?

A. 1024

B. 256

C. 128

D. 720

E. 5040

---

9. Sei $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung $\leqslant$ und $\mathbb{N}^2$ mit der komponentenweisen Ordnung über $\leqslant$ versehen. Wieviele unmittelbare Vorgänger hat das Paar $(2, 2)$ in $\mathbb{N}^2$?

A. 0

B. 9

C. 8

D. 1

E. 2

---

10. Seien f und g Funktionen von natürlichen Zahlen, die positive reelle Werte annehmen. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage $f \in \mathrm{o}(g)$?

A. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

B. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

C. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} > 0$

D. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty$

E. $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

---

11. Die Menge der *(endlichen) Listen* sei induktiv definiert durch:

Basis: Die *leere Liste* `[]` ist eine Liste.
Schritt: Ist L eine Liste so ist auch $x : L$ eine Liste.

Weiters sei die Konkatenation $L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2$ von zwei Listen L_1 und L_2 wie folgt gegeben:

$$L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{wenn } L_1 = \texttt{[]} \\ x : (L \mathbin{\texttt{++}} L_2) & \text{wenn } L_1 = x : L \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion dass für alle Listen L die Gleichung $L \mathbin{\texttt{++}} \texttt{[]} = L$ gilt.

---

12. Sei $M := \{a, b, c, d\}$, sei

$$R = \{(a, c), (b, d), (d, a), (c, b)\} \quad ,$$

und sei G der Graph der Relation R. Stellen Sie die Adjazenzmatrix A des Graphen G auf, berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd-Warshall die Adjazenzmatrix der transitiven Hülle T von R und geben Sie die Mengendifferenz $M^2 \setminus T$ an.

13.

a. Wie lautet die Siebformel (spezialisiert) für drei Mengen A, B, C? [3 Punkte]

b. Berechnen Sie $\#(A \cup B \cup C)$, wobei

$$\begin{aligned}
\#(A) = \#(B) &= 7 \\
\#(A \setminus B) &= 5 \\
\#(A \cup C) &= 10 \\
\#(A \cap C) &= 2 \\
\#(B \cap C) &= 3 \\
\#(A \cap B \cap C) &= 2
\end{aligned}$$

[7 Punkte]

14.

a. Was besagt der chinesische Restsatz? [3 Punkte]

b. Lösen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes die folgende Textaufgabe. Fünf Vögel landen in einem Park und streiten sich um einen Haufen Äste. Sie versuchen die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch am Ende bleiben zwei Äste übrig. Zwei weitere Vögel landen im Park und der Streit um die Äste beginnt aufs Neue. Die sieben Vögel versuchen ein weiteres Mal die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch diesmal bleiben am Ende fünf Äste übrig. Aus wie vielen Ästen besteht der Haufen (mindestens)? [7 Punkte]

---

15. Betrachten Sie den folgenden regulären Ausdruck R und konstruieren Sie einen NEA N, sodass $L(N) = L(R)$.

$$\epsilon + 0(01^*1 + 00)^*01^* \quad .$$

16. Beweisen Sie mit Hilfe der Kontraposition des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\} \quad ,$$

nicht regulär ist.

ANSWERKEY FOR "version3"

```
Version 1:  D  E  F  E  E  E  E  E  E  E
```