**1.** Betrachten Sie die TM $M = (\{s,q,t,r\}, \{\mathsf{0},\mathsf{1}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit $\delta$ gegeben durch

| | $\vdash$ | $\mathsf{0}$ | $\mathsf{1}$ | $\sqcup$ |
|---|---|---|---|---|
| $s$ | $(s,\vdash,R)$ | $(t,\mathsf{0},R)$ | $(q,\mathsf{1},R)$ | $(r,\sqcup,R)$ |
| $q$ | $\cdot$ | $(r,\mathsf{0},R)$ | $(s,\mathsf{1},L)$ | $(r,\sqcup,R)$ |

Bestimmen Sie die akzeptierte Sprache.

---

**A.** $\mathsf{L}(M) = \{\mathsf{1}^n\mathsf{0}^n \mid n \geq 0\}$.

**B.** $\mathsf{L}(M) = \{x \in \{\mathsf{0},\mathsf{1}\}^* \mid x$ is ein Palindrom$\}$.

**C.** $\mathsf{L}(M) = \varnothing$.

**D.** Die TM $M$ ist nicht total, also ist $\mathsf{L}(M)$ nicht definiert.

**E.** $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$.

**F.** $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$.

---

**2.** Welche der folgenden Aussagen über reguläre Ausdrücke gilt im Allgemeinen nicht? (Hierbei bezeichnen $D, E, F$ reguläre Ausdrücke und wir schreiben abkürzend $E \equiv F$, wenn $L(E) = L(F)$.)

---

**A.** $(D(E+F)) \equiv (DF + DE)$.

**B.** $D(D^*) \equiv D^+$.

**C.** $(D^*)^* \equiv D^*$.

**D.** $(E^*F^*)^* \equiv (E+F)^*$.

**E.** $(E+\epsilon)F^* \equiv EF^* + F^*$.

**F.** $(E+F)^*F \equiv (E^*F)^*$.

---

**3.** Welche der folgenden Aussagen zu regulären Sprachen ist richtig?

---

**A.** Jeder reguläre Ausdruck kann in einen DEA, nicht jedoch in einen $\epsilon$-NEA umgewandelt werden.

**B.** Es gibt einen deterministischen Automaten $A$, sodass $L(A)$ nicht durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann.

**C.** Die regulären Sprachen sind unter Komplement und Schnitt, nicht aber unter Mengendifferenz abgeschlossen.

**D.** Die regulären Sprachen sind nur unter Komplement, Vereinigung, Schnitt und Mengendifferenz abgeschlossen.

**E.** Die regulären Sprachen sind (unter anderem) unter Komplement, Vereinigung, Schnitt und Mengendifferenz abgeschlossen.

---

**4.** Sei $p$ eine Primzahl und bezeichne $\mathbb{Z}/p$ der Ring der Restklassen modulo $p$. Welche der folgenden Aussagen ist nicht allgemein gültig?

---

**A.** Für jede Restklasse $\overline{a}$ ungleich $\overline{0}$ und für jede natürliche Zahl $k$ ist $\overline{a}^k \neq \overline{0}$.

**B.** Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ ungleich $\overline{0}$ gibt es eine Restklasse $\overline{b}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

**C.** Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ gibt es eine Restklasse $\overline{b}$ mit $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$.

**D.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p$ teile $a \cdot b$. Dann teilt $p$ auch entweder $a$ oder $b$.

**E.** Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ gibt es eine Restklasse $b$ mit $\overline{a} = \overline{b}^2$.

---

**5.** Seien $M$ und $N$ Mengen. Welche der folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Kardinalität von $M$ kleiner als die Kardinalität von $N$ ist?

---

**A.** Entweder ist $M$ endlich und $N$ unendlich, oder $M$ und $N$ sind beide endlich und $M$ hat weniger Elemente als $N$.

**B.** Es existiert eine surjektive Abbildung von $N$ nach $M$.

**C.** Es existiert keine bijektive Abbildung von $M$ nach $N$.

**D.** Es existiert eine surjektive aber keine bijektive Abbildung von $M$ nach $N$.

**E.** Es existiert eine injektive aber keine bijektive Abbildung von $M$ nach $N$.

---

**6.** Wieviele Möglichkeiten gibt es, die symbolischen Zustände $A, B, C, D$ eines endlichen Automaten durch Bitpaare zu codieren, sodass verschiedene Zustände auch verschiedene Bitpaare bekommen?

---

**A.** 64

**B.** 16

**C.** 256

**D.** 128

**E.** 32

**F.** 24

---

**7.** Sei $G$ ein Baum mit $n > 0$ Ecken. Wieviele Kanten hat $G$?

---

**A.** $(n+1)^2$

**B.** $(n-1)^2$

**C.** $n^2$

**D.** $n+1$

**E.** $n$

**F.** $n-1$

---

**8.** Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

---

**A.** $n! \in \Theta(2^n)$

**B.** $n \log n \in \Omega(n^2)$

**C.** $n \in \mathrm{O}(\log n)$

**D.** $n \in \mathrm{o}(3n)$

**E.** $\log n \in \mathrm{o}(n)$

---

**9.** Gegeben der folgende Beweis, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 13$:

$$4n^2 \geq 3n^2 + 5n + 100 \quad .$$

Im Basisfall ist $n = 13$ und somit $4n^2 = 676 \geq 672 = 3n^2 + 5n + 100$. Für den nächsten Schritt sei $n \geq 13$ und $n \mapsto n + 1$. Die IH lautet $4n^2 \geq 3n^2 + 5n + 100$. Zu zeigen ist $4(n+1)^2 \geq 3(n+1)^2 + 5(n+1) + 100$, was leicht nachgeprüft werden kann:

$$4(n+1)^2 = 4n^2 + 8n + 4 \geq (3n^2 + 5n + 100) + 8n + 4 \geq 3(n+1)^2 + 5(n+1) + 100 \quad .$$

Wie nennt man einen solchen Beweis?

---

**A.** Das ist kein Beweis, da das Argument nicht korrekt ist.

**B.** Einen Beweis mittels struktureller Induktion.

**C.** Einen Beweis mittels wohlfundierter Induktion.

**D.** Einen Beweis mittels Widerspruch.

**E.** Einen deduktiven Beweis.

**F.** Einen Beweis mittels vollständiger Induktion.

---

**10.** Sei $M$ eine Menge mit einer wohlfundierten partiellen Ordnung $\leq$. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein richtig?

---

**A.** Jedes Element von $M$ hat nur endlich viele Nachfolger.

**B.** Jedes Element von $M$ hat nur endlich viele Vorgänger.

**C.** Jede nichtleere Teilmenge von $M$ besitzt ein größtes Element.

**D.** Jede nichtleere Teilmenge von $M$ besitzt ein kleinstes Element.

**E.** Jede nichtleere Teilmenge von $M$ besitzt ein maximales Element.

**F.** Jede nichtleere Teilmenge von $M$ besitzt ein minimales Element.

---

**11.** Die Menge der *(endlichen) Listen* sei induktiv definiert durch:

**Basis:** Die *leere Liste* `[]` ist eine Liste.
**Schritt:** Ist $L$ eine Liste so ist auch $x : L$ eine Liste.

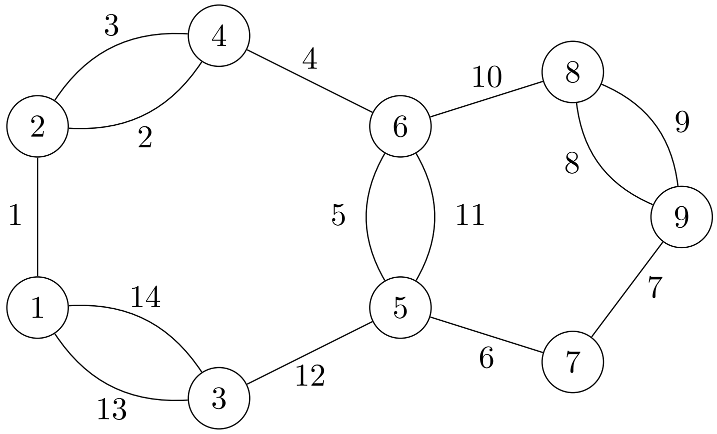
Weiters sei die Konkatenation $L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2$ von zwei Listen $L_1$ und $L_2$ wie folgt gegeben:

$$L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{wenn } L_1 = \texttt{[]} \\ x : (L \mathbin{\texttt{++}} L_2) & \text{wenn } L_1 = x : L \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion dass für alle Listen $L$ die Gleichung $L \mathbin{\texttt{++}} \texttt{[]} = L$ gilt.

---

**12.** Betrachten Sie den folgenden Graphen $G$:




**a.** Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum $T$ von Graph $G$, den Sie mit der Ausführung des Algorithmus von Kruskal erhalten. Geben Sie alle Schritte des Algorithmus an und berechnen Sie die Bewertung $w$ von $T$. [7 Punkte]

**b.** Geben Sie einen spannenden Baum $T'$ von $G$ mit Bewertung $w + 9$ an. [3 Punkte]

**13.**

**a.** Wie lautet die Siebformel (spezialisiert) für drei Mengen $A, B, C$? [3 Punkte]

**b.** Berechnen Sie $\#(A \cup B \cup C)$, wobei

$$\begin{aligned}
\#(A) &= 6 \\
\#(B) &= 5 \\
\#(C) &= 3 \\
\#(A \setminus B) &= 4 \\
\#(B \cap C) &= 0 \\
\#(A \cap C) &= 2
\end{aligned}$$

[7 Punkte]

---

**14.**

**a.** Was besagt der chinesische Restsatz? [3 Punkte]

**b.** Lösen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes die folgende Textaufgabe. Fünf Vögel landen in einem Park und streiten sich um einen Haufen Äste. Sie versuchen die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch am Ende bleiben zwei Äste übrig. Zwei weitere Vögel landen im Park und der Streit um die Äste beginnt aufs Neue. Die sieben Vögel versuchen ein weiteres Mal die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch diesmal bleiben am Ende fünf Äste übrig. Aus wie vielen Ästen besteht der Haufen (mindestens)?

[7 Punkte]

---

**15.** Betrachten Sie den folgenden NEA $N$ und wandeln Sie diesen in einen äquivalenten DEA um. Verwenden Sie zur Umwandlung die Teilmengenkonstruktion.

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow q_0$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ |
| $q_1$ | $\{q_2\}$ | $\varnothing$ | $\{q_1\}$ |
| $q_2$ | $\varnothing$ | $\{q_3\}$ | $\varnothing$ |
| $*q_3$ | $\{q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_3\}$ |

---

**16.** Beweisen Sie mit Hilfe der Kontraposition des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{1^n01^n \mid \text{wobei } n \geqslant 0\} \quad ,$$

nicht regulär ist.

---

**ANSWERKEY FOR "versionG"**

`Version 1:  F  F  E  E  E  F  F  E  F  F`