1. Betrachten Sie die TM $M = (\{s, q, t, r\}, \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ gegeben durch

	$\vdash$	$\mathsf{0}$	$\mathsf{1}$	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(q, \mathsf{0}, R)$	$(t, \mathsf{1}, R)$	$(r, \sqcup, R)$
q	$\cdot$	$(s, \mathsf{0}, L)$	$(r, \mathsf{1}, R)$	$(r, \sqcup, R)$

Bestimmen Sie die akzeptierte Sprache.

A. $\mathsf{L}(M) = \{\mathsf{1}^n\mathsf{0}^n \mid n \geq 0\}$.

B. $\mathsf{L}(M) = \{x \in \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}^* \mid x$ is ein Palindrom$\}$.

C. $\mathsf{L}(M) = \varnothing$.

D. Die TM M ist nicht total, also ist $\mathsf{L}(M)$ nicht definiert.

E. $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$.

F. $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$.

---

2. Welche der folgenden Aussagen über reguläre Ausdrücke gilt? (Hierbei bezeichnen D, E, F beliebige reguläre Ausdrücke und wir schreiben abkürzend $E \equiv F$, wenn $L(E) = L(F)$.)

A. $(E + \epsilon)F^* \equiv EF^+$.

B. $\epsilon + LL^* \equiv L^*L\epsilon$.

C. $D + (E + F) \equiv (D + E)F$.

D. $E\varnothing \equiv E$.

E. $(E + \varnothing) \equiv (E + \epsilon)$.

F. $(\varnothing)^* \equiv \epsilon$.

---

3. Welche der folgenden Aussagen zu regulären Sprachen ist richtig?

A. Die entscheidene Eigenschaft eines ϵ-NEA A ist, dass A zählen kann.

B. Eine reguläre Sprache kann entweder von einem endlichen Automaten oder von einem regulären Ausdruck beschrieben werden, nicht jedoch von beidem.

C. Jede rekursiv aufzählbare Sprache ist auch regulär.

D. Alle Programmiersprachen sind regulär.

E. Zu jeder reguläre Sprache L existiert ein eindeutiger und minimaler deterministischer endlicher Automat A, sodass L die Sprache von A ist.

---

4. Sei p eine Primzahl und bezeichne $\mathbb{Z}/p$ der Ring der Restklassen modulo p. Welche der folgenden Aussagen ist nicht allgemein gültig?

A. Für jede Restklasse $\overline{a}$ ungleich $\overline{0}$ und für jede natürliche Zahl k ist $\overline{a}^k \neq \overline{0}$.

B. Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ ungleich $\overline{0}$ gibt es eine Restklasse $\overline{b}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

C. Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ gibt es eine Restklasse $\overline{b}$ mit $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$.

D. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und p teile $a \cdot b$. Dann teilt p auch entweder a oder b.

E. Zu jeder Restklasse $\overline{a}$ gibt es eine Restklasse b mit $\overline{a} = \overline{b}^2$.

---

5. Seien M und N Mengen. Welche der folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, dass M und N die gleiche Kardinalität haben?

A. M und N sind entweder beide unendlich oder beide endlich mit der gleichen Anzahl von Elementen.

B. Es existiert eine surjektive Abbildung von N nach M.

C. Es existiert eine injektive Abbildung von N nach M.

D. Es existiert eine surjektive Abbildung von M nach N.

E. Es existiert eine injektive Abbildung von M nach N.

F. Es existiert eine bijektive Abbildung von M nach N.

---

6. Wieviele binäre Wörter der Länge 8 mit 5 Einsen gibt es?

A. 23

B. 336

C. 32

D. 65

E. 56

---

7. Sei G ein Baum mit $n > 0$ Ecken. Wieviele Kanten hat G?

A. $(n+1)^2$

B. $(n-1)^2$

C. n^2

D. $n+1$

E. n

F. $n-1$

---

8. Seien f und g Funktionen von natürlichen Zahlen, die positive reelle Werte annehmen. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage $f \in \Theta(g)$?

A. $f \in \mathrm{O}(g)$ oder $f \in \Omega(g)$

B. $f \notin \mathrm{O}(g)$ und $f \notin \Omega(g)$

C. $f \notin \mathrm{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$

D. $f \in \mathrm{O}(g)$ und $f \notin \Omega(g)$

E. $f \in \mathrm{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$

---

9. Gegeben der folgende Beweis, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

Im Basisfall ist $n = 0$ und $\sum_{i=0}^{n} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$. Dann zeigen wir $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Die IH lautet $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad .$$

Wie nennt man einen solchen Beweis?

A. Das ist kein Beweis, da das Argument nicht korrekt ist.

B. Einen Beweis mittels struktureller Induktion.

C. Einen Beweis mittels wohlfundierter Induktion.

D. Einen Beweis mittels Widerspruch.

E. Einen deduktiven Beweis.

F. Einen Beweis mittels vollständiger Induktion.

---

10. Sei M eine Menge mit einer wohlfundierten partiellen Ordnung $\leq$. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein richtig?

A. Jedes Element von M hat nur endlich viele Nachfolger.

B. Jedes Element von M hat nur endlich viele Vorgänger.

C. Jede nichtleere Teilmenge von M besitzt ein größtes Element.

D. Jede nichtleere Teilmenge von M besitzt ein kleinstes Element.

E. Jede nichtleere Teilmenge von M besitzt ein maximales Element.

F. Es gibt keine unendliche absteigende Kette in M.

---

11. Die Menge der *(endlichen) Listen* sei induktiv definiert durch:

Basis: Die *leere Liste* `[]` ist eine Liste.
Schritt: Ist L eine Liste so ist auch $x : L$ eine Liste.

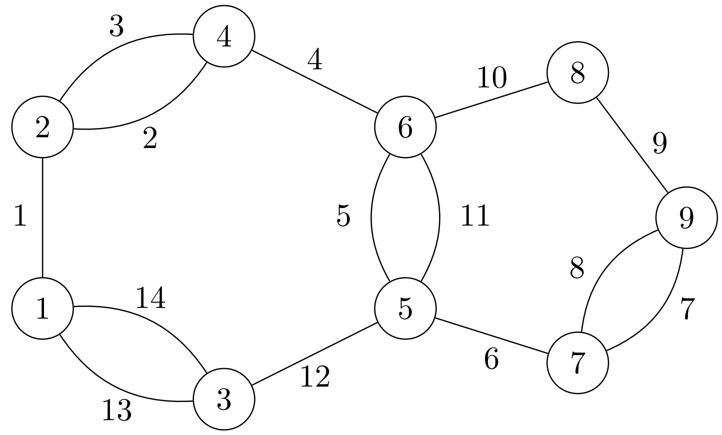
Weiters sei die Konkatenation $L_1 \mathbin{+\!+} L_2$ von zwei Listen L_1 und L_2 wie folgt gegeben:

$$L_1 \mathbin{+\!+} L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{wenn } L_1 = [\,] \\ x : (L \mathbin{+\!+} L_2) & \text{wenn } L_1 = x : L \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion dass für alle Listen L die Gleichung $L \mathbin{+\!+} [\,] = L$ gilt.

---

12. Betrachten Sie den folgenden Graphen G:



a. Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum T von Graph G, den Sie mit der Ausführung des Algorithmus von Kruskal erhalten. Geben Sie alle Schritte des Algorithmus an und berechnen Sie die Bewertung w von T. [7 Punkte]

b. Geben Sie einen spannenden Baum T' von G mit Bewertung $w + 9$ an. [3 Punkte]

13.

a. Wie lautet die Siebformel (spezialisiert) für drei Mengen A, B, C? [3 Punkte]

b. Berechnen Sie $\#(A \cup B \cup C)$, wobei

$$\begin{aligned} \#(A) = \#(B) &= 7 \\ \#(A \setminus B) &= 5 \\ \#(A \cup C) &= 10 \\ \#(A \cap C) &= 2 \\ \#(B \cap C) &= 3 \\ \#(A \cap B \cap C) &= 2 \end{aligned}$$

[7 Punkte]

14.

a. Was besagt der chinesische Restsatz? [3 Punkte]

b. Lösen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes die folgende Textaufgabe. Drei Vögel landen in einem Park und streiten sich um einen Haufen Äste. Sie versuchen die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch am Ende bleiben vier Äste übrig. Vier weitere Vögel landen im Park und der Streit um die Äste beginnt aufs Neue. Die sieben Vögel versuchen ein weiteres Mal die Äste gleichmäßig aufzuteilen, doch am Ende bleiben wieder vier Äste übrig. Aus wie vielen Ästen besteht der Haufen (mindestens)? [7 Punkte]

---

15. Betrachten Sie den folgenden NEA N und wandeln Sie diesen in einen äquivalenten DEA um. Verwenden Sie zur Umwandlung die Teilmengenkonstruktion.

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
$*q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

16. Beweisen Sie mit Hilfe der Kontraposition des des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^n b a^n \mid \text{wobei } n \geqslant 0\} \quad ,$$

nicht regulär ist.

ANSWERKEY FOR "versionU"

```
Version 1:  F  F  E  E  F  E  F  E  F  F
```