1) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ gilt:
$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

2) Die Menge der *(endlichen) Listen* sei induktiv definiert durch:
   - Die *leere Liste* `[]` is eine Liste.
   - Ist L eine Liste so ist auch $x : L$ eine Liste. Hierbei nennt man das Listenelement x den Kopf und L die Restliste von $x : L$.

   Zum Beispiel ist die Liste der Zahlen von 1 bis 5: $1 : (2 : (3 : (4 : (5 : \texttt{[]}))))$.

   Nun sei ++ die Funktion die zwei Listen konkateniert und len die Funktion welche die Länge (also Anzahl der Elemente) einer Liste berechnet:
$$L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{wenn } L = \texttt{[]} \\ x : (L \mathbin{\texttt{++}} L_2) & \text{wenn } L_1 = x : L \end{cases}$$
$$\operatorname{len}(L) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } L = \texttt{[]} \\ 1 + \operatorname{len}(L_1) & \text{wenn } L = x : L_1 \end{cases}$$
   Beweisen sie dass $\operatorname{len}(L_1 \mathbin{\texttt{++}} L_2) = \operatorname{len}(L_1) + \operatorname{len}(L_2)$ für alle Listen L_1 und L_2 per struktureller Induktion über L_1.

3) Betrachten Sie den binären logischen Operator $\overline{\wedge}$ (NAND) mit folgender Wahrheitstafel:

$\overline{\wedge}$	T	F
T	F	T
F	T	T

   Beweisen Sie mittels struktureller Induktion über die Syntax der Aussagenlogik (siehe Beispiel 3.11), dass es für jede aussagenlogische Formel F eine äquivalente Formel F' gibt, welche als einzigen Operator $\overline{\wedge}$ verwendet.

4) Aufgabe 3.5[1]

5) Gegeben sei die Relation R über Brüchen durch $\frac{a}{b} \; R \; \frac{a}{b-a}$ wenn $0 < a < b$ und $\frac{a}{b} \; R \; \frac{a-b}{b}$ wenn $a > b > 0$.
   a) Zeigen Sie, dass es keine unendliche Kette an Brüchen $\frac{a_0}{b_0} \; R \; \frac{a_1}{b_1} \; R \; \frac{a_2}{b_2} \; R \cdots$ gibt.
   b) Zeigen Sie, dass wenn Sie mit einem nicht kürzbaren Bruch beginnen, z.B wenn $gcd(a_0, b_0) = 1$, wird eine Kette von nicht kürzbaren Brüchen ausgegeben, welche eventuell mit $\frac{1}{1}$ endet.
   c) Wenn R auf unkürzbare Brüche begrenzt wird ein einziger Binärbaum, welcher alle positiven rationalen Zahlen enthält, ausgegeben. Zeigen Sie dies, durch beweisen, dass für jeden nicht kürzbaren Bruch $\frac{c}{d}$, genau zwei Brüche $\frac{a}{b}$ für die gilt, dass $\frac{a}{b} \; R \; \frac{c}{d}$. Beide sind nicht kürzbar und unterscheidbar von anderen wie $\frac{c'}{d'}$. Fertigen Sie eine Skizze an.

[1] Aufgabennummern beziehen sich immer auf das Skriptum zur Vorlesung.