1) *Lösung.*

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} \epsilon & b & a \\ a & \epsilon + a & \varnothing \\ b & \varnothing & \epsilon + b \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} \epsilon + \epsilon\epsilon^*\epsilon & b + \epsilon\epsilon^* b & a + \epsilon\epsilon^* a \\ a + a\epsilon^*\epsilon & \epsilon + a + a\epsilon^* b & \varnothing + a\epsilon^* a \\ b + b\epsilon^*\epsilon & \varnothing + b\epsilon^* b & \epsilon + b + b\epsilon^* a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & b & a \\ a & \epsilon + a + ab & aa \\ b & bb & \epsilon + b + ba \end{pmatrix}$$

Für die nächste Iteration vereinfachen wir sofort $(R^{(1)}_{22})^* = (\epsilon + a + ab)^* = (a + ab)^*$ und ebenso für die zweite Zeile und Spalte von $R^{(2)}$, also $R^{(1)}_{22}(R^{(1)}_{22})^* = (R^{(1)}_{22})^* R^{(1)}_{22} = (a + ab)^*$

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= \begin{pmatrix} \epsilon + b(a+ab)^* b & b + b(a+ab)^* & a + b(a+ab)^* aa \\ a + (a+ab)^* a & \epsilon + a + ab + (a+ab)^* & aa + (a+ab)^* aa \\ b + bb(a+ab)^* a & bb + bb(a+ab)^* & \epsilon + b + ba + bb(a+ab)^* aa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon + b(a+ab)^* b & b(a+ab)^* & a + b(a+ab)^* aa \\ (a+ab)^* a & (a+ab)^* & (a+ab)^* aa \\ b + bb(a+ab)^* a & bb(a+ab)^* & \epsilon + b + ba + bb(a+ab)^* aa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Den drei Algorithmen liegt die gleiche Idee zugrunde (man betrachtet in jeder Iteration k nur Wege mit Zwischenecken $\leq k$). Die Matrizen in den Algorithmen werden allerdings unterschiedlich befüllt: Floyd initialisiert die Diagonale mit 0ern, Kleene mit $\epsilon +$evtl. Schleifen, Warshall mit einer 1 bei Schleifen und 0 sonst. Unerreichbarkeit wird in Floyd mit ∞ dargestellt, bei Kleene mit $\varnothing$ und bei Warshall mit 0.

Die Berechnung innerhalb der Schleife ist zwar jeweils unterschiedlich, setzt sich aber immer aus den gleichen Komponenten zusammen. Um den Eintrag an Stelle $R^{(k)}_{ij}$ zu berechnen braucht man immer die Einträge $R^{(k-1)}_{ik}$ und $R^{(k-1)}_{kj}$ und bei Kleene zusätzlich noch $R^{(k-1)}_{kk}$. ($R^{(k-1)}_{kk}$ ist bei Floyd nicht nötig, da die Diagonale sowieso nur aus 0ern besteht und damit die Länge des kürzesten Weges nicht beeinflusst.)

□

2) a) Wir nehmen die Menge der Zustände Q der Größe n des Automaten als Taubenfluglöcher, und sehen die Zustände p_0,p_1,p_2, … die im Durchlauf auftreten als Abbildung p von den natürlichen Zahlen zu den Taubenfluglöcher. Die Beschränkung f von p auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ hat eine Domain mit $n + 1$ Elementen und eine Ko-Domain mit n Elementen, somit muss es durch das Taubenschlagprinzip (Satz 6.4) $i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ geben, sodass $f(i) = f(j)$. Dadurch, dass die natürlichen Zahlen total geordnet sind durch $<$ können wir davon ausgehen, dass $i < j$. Da f eine Beschränkung von p ist, schließen wir $p_i = p_j$, wie gewünscht.

b) Wie oben sehen wir den unendlichen Lauf als Abbildung p von den natürlichen Zahlen (Tauben) auf eine endliche Mengen an Zuständen (Taubenfluglöcher) $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.

Für $1 \leq i \leq n$, $P_i = |\{n \mid p_n = q_i\}|$, das heißt P_i ist die Anzahl an Tauben im Taubenflugloch i. Wenn jedes P_i endlich wäre, so wäre auch ihre Summe $P_1 + \ldots + P_n$ endlich, widersprüchlich zur Unendlichkeit der natürlichen Zahlen.

c) iii. *Lösung.* Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie an es wäre möglich. Bemerken Sie, dass diagonal gegenüberliegende Ecken eines kompletten Schachbretts die gleiche Farbe haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie annehmen, dass die entfernten Ecken beide weiß waren. Somit sind nur noch 30 weiße Felder von den originalen 32 eines kompletten Schachbretts übrig, während die Anzahl der schwarzen Felder mit 32 gleich geblieben ist. Diese 32 schwarzen Felder sind die Tauben. Jeder Dominostein, egal wie er auf dem Brett platziert wird, wird immer exakt ein schwarzes und ein weißes Feld abdecken. Bei 62 Feldern zum abdecken werden 31 Dominosteine benötigt. Diese 31 Dominosteine sind die Taubenfluglöcher. Durch das Taubenschlagprinzip, müssen zwei der schwarzen Felder durch den selben Dominostein abgedeckt sein. Dadurch das dies eindeutig unmöglich ist, haben wir einen Widerspruch erreicht. Somit muss das Gegenteilige unserer Aussage gelten:

> Es ist nicht möglich ein Schachbrett mit Dominosteinen abzudecken welche exakt zwei Felder bedecken, wenn die Felder in den zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken entfernt wurden. □

4) L ist die Sprache der Palindrome mit gerader Länge. Wir wollen zeigen, dass für beliebiges n ein Palindrom mit gerader Länge (und mindestens Länge n) gefunden werden kann, sodass, wenn wir im Präfix der Länge n einen Teil des Wortes k-mal wiederholen, das neue Wort nicht mehr in L liegt. Dafür instantiieren wir Satz 8.66 wie folgt:

- Für beliebiges n wählen wir das Wort $w = 0^n 1 1 0^n \in L$ mit $\ell(w) \geq n$.
- Für alle x, y, $z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leq n$ wissen wir, durch unsere Wahl von w, dass xy und damit auch y nur aus 0ern bestehen kann. Also haben wir $y = 0^i, 0 < i \leq n$.
- Wir wählen $k = 2$, damit gilt $w' = xy^2z = 0^{n+i} 1 1 0^n \notin L$.

5) *Lösung.* Eine Zeichenkette $x \in \Sigma^*$ erfüllt die Bedingung $\#a(x) = \ell(x)$ genau dann wenn sie ausschließlich aus as besteht. Also gilt $L = \mathsf{L}(\boldsymbol{a^*})$, wodurch L offensichtlich regulär ist. □