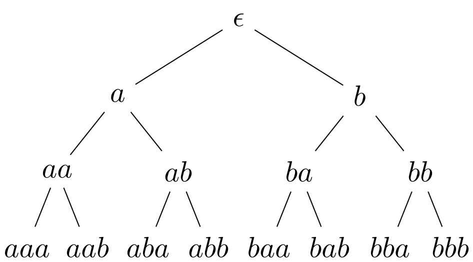
3) *Lösung.* Reflexiv: Für jede Partition P gilt $P \leq P$, da jeder Block in P Teilmenge von sich selbst ist.
Antisymmetrisch: Wenn $P \leq Q$ und $Q \leq P$ gilt, dann ist jeder Block von P Teilmenge eines Blocks von Q und jeder Block von Q Teilmenge eines Blocks von P. Sei S ein beliebiger Block aus P. Dann muss $S \subseteq T \in Q$ gelten. Für diesen Block T muss außerdem gelten $T \subseteq R \in P$. Also haben wir $S \subseteq T \subseteq R$ und da der Block S laut Definition von Partitionen nicht leer sein darf, gilt $S \cap R \neq \emptyset$. Daraus wiederum folgt, dass die beiden Blöcke $S \in P$ und $R \in P$ nicht disjunkt sind, also müssen sie gleich sein (laut Def. Partition) und es gilt $S = R = T$. Also ist jeder Block in P gleich einem Block in Q und damit ist $P = Q$.
Transitiv: Wenn $P \leq Q$ und $Q \leq R$ gilt, dann ist jeder Block von P Teilmenge eines Blocks von Q und jeder Block von Q wiederum Teilmenge eines Blocks von R. Damit ist auch jeder Block von P Teilmenge eines Blocks von R und es gilt $P \leq R$.

Die Verfeinerungsordnung ist nicht total, da zum Beispiel $\{\{a,b\},\{c\}\} \not\leq \{\{a\},\{b,c\}\}$ und $\{\{a\},\{b,c\}\} \not\leq \{\{a,b\},\{c\}\}$. □

4) *Lösung.* Die Präfixrelation auf $\{a,b\}^{\leqslant 3}$ kann wie folgt visualisiert werden (wobei jedes Wort das „nach unten" über Linien mit einem anderen Wort verbunden ist, ein Präfix des letzteren ist):



Demnach ist das kleinste (und einzige minimale) Element das leere Wort ϵ. Es gibt kein größtes Element, jedoch die maximalen Elemente: *aaa*, *aab*, *aba*, *abb*, *baa*, *bab*, *bba* und *bbb*. □

5) Seien $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$, $v = (v_0, ..., v_{m-1})$, und $u = (u_0, ..., u_{\ell-1})$ Sequenzen über dem Alphabet Σ.

a) Die Subsequenz Relation ist partiell. Um die zu beweisen müssen wir zeigen, dass Reflexivität, Transitivität, und Antisymmetrie gelten.

(Reflexivität) Dass w eine Subsequenz von sich selbst ist, kann gezeigt werden, wenn man $(0, \ldots, n-1)$ und $i_k = k$ nimmt. Daraus folgt, dass man $w_k = w_k$ für alle $0 \leq k < n-1$ zeigen muss, was trivial ist.

(transitivity) Angenommen w ist eine Subsequenz von v, gegeben durch $(i_0, \ldots, i_{n-1})$. Und v ist eine Subsequenz von u, gegeben durch $(j_0, \ldots, j_{m-1})$. Dann können wir behaupten, dass w eine Subsequenz von u ist, was durch $(j_{i_0}, \ldots, j_{i_{n-1}})$ gegeben ist. Die Behauptung stimmt, da $w_k = v_{i_k} = w_{j_{i_k}}$ gilt, was für alle $0 \leq k < n-1$ aus der ersten und zweiten Behauptung folgt.

(Antisymmetrie) Um Antisymmetrie zu zeigen, ist es wichtig zu wissen, wenn w eine Subsequenz von v ist, dann ist w nie länger als v, z.B. $n \leq m$. Wenn wiederum v eine Subsequenz von w ist, dann gilt $m \leq n$. Durch Antisymmetrie von $\leq$ folgt, dass w und v die gleiche Länge $n = m$ haben müssen.
Die Bedingung dafür, dass w eine Subsequenz von v ist, dann gilt $0 \leq i_0 < \ldots < i_{n-1} < n$. Dies bedeutet, dass $i_k = i$ für alle $0 \leq k < n$. Was wiederum bedeutet, dass $w_k = v_k$ für alle k, was zu beweisen war.

b) Die Teilwort Relation ist partiell. Wir erweitern die Beweise aus a).

(Reflexivität) Es genügt zu zeigen, dass $(0, \ldots, n-1)$ eine Sequenz an fortlaufenden Nummern $k, k+1$ ist.

(Transitivität) Es genügt zu zeigen, wenn $(i_0, \ldots, i_{n-1})$ und $(j_0, \ldots, j_{m-1})$ Sequenzen von fortlaufenden Nummern sind, dann sind $i_{k+1} = i_k + 1$ und $j_{k+1} = j_k + 1$ für ein geeignetes k wahr. Somit gilt $(j_{i_0}, \ldots, j_{i_{n-1}})$, durch $j_{i_{k+1}} = j_{i_k+1} = j_{i_k} + 1$.

(Antisymmetrie) Gleich wie Reflexivität

c) Ja, wenn v ein Teilwort von w ist, dann ist es auch eine Subsequenz von u. Durch Transitivität von Subsequenzen gezeigt in a).

d) Wenn w ein wahres Teilwort von v ist, dann ist die Länge von w mindestens um 1 kleiner als die von v.Da das wort *Unendlichkeit* die Länge 13 hat, ist die längste Sequenz von Worten 14. (Das leere Wort erhöht eine Sequenz um Länge 1).