2) *Lösung.* In der Induktionsbasis ist L_1 die leere Liste `[]` und es gilt

$$\mathrm{len}(L_1 \mathbin{+\!+} L_2) = \mathrm{len}([\,] \mathbin{+\!+} L_2) = \mathrm{len}(L_2) = 0 + \mathrm{len}(L_2) = \\ \mathrm{len}([\,]) + \mathrm{len}(L_2) = \mathrm{len}(L_1) + \mathrm{len}(L_2).$$

Im Induktionsschritt haben wir $L_1 = x : L$ und die Induktionshypothese (IH) besagt dass $\mathrm{len}(L \mathbin{+\!+} L_2) = \mathrm{len}(L) + \mathrm{len}(L_2)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{len}(L_1 \mathbin{+\!+} L_2) &= \mathrm{len}((x : L) \mathbin{+\!+} L_2) \\
&= \mathrm{len}(x : (L \mathbin{+\!+} L_2)) && \text{(Definition von ++)} \\
&= 1 + \mathrm{len}(L \mathbin{+\!+} L_2) && \text{(Definition von len)} \\
&= 1 + (\mathrm{len}(L) + \mathrm{len}(L_2)) && \text{(IH)} \\
&= (1 + \mathrm{len}(L)) + \mathrm{len}(L_2) \\
&= \mathrm{len}(x : L) + \mathrm{len}(L_2) && \text{(Definition von len)} \\
&= \mathrm{len}(L_1) + \mathrm{len}(L_2)
\end{aligned}$$

□

3) *Lösung.* Basis ($F =$ atomare Aussage E):
E enthält keine Operatoren, also ist $E = E'$.

Schritt:

- ($F = \neg A$): Laut IH existiert eine zu A äquivalente Formel A', welche als einzigen Operator $\barwedge$ verwendet. $F' = (A' \barwedge A')$ enthält dann ebenfalls als einzigen Operator $\barwedge$. Die Äquivalenz $F \equiv F'$ kann über eine Wahrheitstabelle gezeigt werden.
- ($F = (A \vee B)$): Laut IH existieren A' und B' welche zu A bzw. B äquivalent sind und als einzigen Operator $\barwedge$ enthalten. $F' = ((A' \barwedge A') \barwedge (B' \barwedge B'))$ enthält dann als einzigen Operator $\barwedge$. Die Äquivalenz $F \equiv F'$ kann wieder über eine Wahrheitstabelle gezeigt werden.
- ($F = (A \wedge B)$): Analog zum Fall $(A \vee B)$ mit $F' = ((A' \barwedge B') \barwedge (A' \barwedge B'))$.

□

4) *Lösung.* Wir wählen die graduiert-lexikographische Ordnung $\leq_{\mathrm{gradlex}}$ (mit $a < b$).

- Basis: Da $\leq_{\mathrm{gradlex}}$ total ist, ist ϵ das einzige minimale Element. In der Tat hat ϵ eine gerade Anzahl von as.
- Schritt: Sei w ein beliebiges nicht-minimales Element. Somit ist $w \neq \epsilon$. Die Induktionshypothese gilt für alle x mit $x <_{\mathrm{gradlex}} w$ und besagt, dass wenn x ein Palindrom gerader Länge ist, dass x dann eine gerade Anzahl an as enthält. Wir zeigen „$w \in P$ und $\ell(w)$ gerade impliziert w hat gerade Anzahl an as“. Da w ein Palindrom gerader Länge ungleich ϵ ist, hat w eine der beiden Gestalten
  - $w = axa$
  - $w = bxb$

Beachte, dass auch x ein Palindrom gerader Länge ist. Da $x <_{\text{gradlex}} w$ hat x eine gerade Anzahl von as und somit auch w. $\square$

5) a) Wir geben eine Maßfunktion m für Brüche über den natürlichen Zahlen an, sodass $m(x) > m(y)$ wenn $x\ R\ y$ gilt. Für einen Bruch $x = \frac{a}{b}$ nehmen wir die Summe $a + b$ aus Zähler a und Nenner b als Maß, das heißt: $m(x) := a + b$. Wir überprüfen, dass für $\frac{a}{b}\ R\ \frac{a}{b-a}$ mit $0 < a < b$ gilt, dass $m(\frac{a}{b}) = a + b > b = a + (b - a) = m(\frac{a}{b-a})$. Der zweite Fall $(0 < b < a)$ folgt analog. Angenommen wir hätten nun eine unendliche Kette $\frac{a_0}{b_0}\ R\ \frac{a_1}{b_1}\ R\ \frac{a_2}{b_2}\ R \cdots$, dann könnte man eine unendliche fallende Kette von natürlichen Zahlen $m(\frac{a_0}{b_0})\ R\ m(\frac{a_1}{b_1})\ R\ m(\frac{a_2}{b_2})\ R \cdots$, daraus ableiten, was unmöglich ist.

Beachten Sie, dass Brüche hier als Paare von natürlichen Zahlen aufgefasst werden, ohne ihre Äquivalenz $\equiv$ als rationale Zahlen zu beachten. In diesem Fall wäre die oben genannte Messfunktion nicht mehr absteigend, z.B.: $\frac{1}{2}\ R\ \frac{1}{1} \equiv \frac{4}{4}$. Kürzt man jedoch die Brüche bevor man m anwendet, so ist die Aussage, dass die Kette abnimmt noch immer wahr. Zum Beispiel wenn $\frac{c \cdot a}{c \cdot b}\ R\ \frac{c \cdot a}{c \cdot b - c \cdot a}$ mit $0 < c \cdot a < c \cdot b$, dann erhalten wir nach Division durch c $\frac{a}{b}\ R\ \frac{a}{b-a}$ wenn $0 < a < b$, und man kann weiter schließen wie oben.

b) Laut a) kann es keine unendlich fallenden Ketten geben. Somit reicht es zu zeigen, dass für jedes $x = \frac{a}{b} \neq \frac{1}{1}$ ein unkürzbares y exisitiert sodass $x\ R\ y$. Wir unterscheiden die Fälle $a < b$, $a > b$ und $a = b$. Im ersten und zweiten Fall können wir jeweils die Definition von R anwenden, d.h. $y = \frac{a}{b-a}$ bzw. $y = \frac{a-b}{b}$. Die Unkürzbarkeit von y folgt aus $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a) = \gcd(a - b, b)$. Diese Beobachtung ist die Basis für den euklidischen größten gemeinsamen Teiler Algorithmus, welcher später genauer behandelt wird. Im dritten Fall folgt aus der Unkürzbarkeit von $\frac{a}{b}$ sofort $a = 1 = b$.

c) Der Baum, auf den angespielt wird ist der so genannte Calkin–Wilf tree. Es handelt sich dabei um einen Binärbaum mit Wurzel $\frac{1}{1}$.

Dass es ein *Baum mit Wurzel* $\frac{1}{1}$ ist, folgt aus der Definition von R. Für jeden Knoten $x = \frac{a}{b}$ gibt es genau einen Vorgängerknoten y, sodass $x\ R\ y$, weil entweder $a < b$ oder $a > b$ gilt. Die einzige Ausnahme ist $a = b$, dann ist aber $a = 1 = b$, also $x = \frac{1}{1}$, welches die Wurzel des Baumes ist.

Dass es ein *Binär*baum ist, folgt durch die Beobachtung, dass jeder nicht kürzbare Bruch $\frac{c}{d}$ eindeutig als $\frac{a}{b-a}$ für $0 < a < b$ dargestellt werden kann: Da die Zähler gleich sein müssen gilt $c = a$. Für den Nenner erhalten wir $b - c = b - a = d$ woraus $b = d + c$ folgt. Dadurch hat jeder Knoten $\frac{c}{d}$ den Knoten $\frac{c}{d+c}$ als Nachfolger. Außerdem kann $\frac{c}{d}$ eindeutig als $\frac{a-b}{b}$ für $0 < b < a$ dargestellt werden, woraus sich $\frac{c+d}{d}$ als Nachfolger ergibt. Wenn man diese nun als linkes und rechtes Kind von $\frac{c}{d}$ nimmt, ergibt sich daraus der Baum.