2) Sei $E_1 := \{s_1, \ldots, s_n\}$ die Menge der Studenten und $E_2 := \{w_1, w_2, w_3\}$ die Menge der Wahlfächer. Dann ist der Graph mit der Eckenmenge

$$E = E_1 \cup E_2$$

und der Kantenmenge

$$K = \{\{s_i, w_j\} \mid \text{ Student } i \text{ hat Wahlfach } j \text{ belegt}\}$$

bipartit.

Es gilt

$$\sum_{w \in E_2} \mathrm{Grad}(w) = 23 + 11 + 8 = 42.$$

Also gibt es 42 Kanten in unserem Graphen. 6 davon entfallen auf die beiden Studenten, die alle drei Wahlfächer belegen. Nun muss man bedenken dass für diese beiden Studenten gilt, dass sie auch in die Kategorie Termersetzung + Maschinelles Lernen fallen. Das heißt von den 4 Studenten gibt es nur 2, die ausschließlich diese zwei Fächer besuchen. Gleiches gilt natürlich für die anderen Kombinationen. Das heißt wir haben $(4-2)+(2-2)+(5-2) = 5$ Studenten die genau 2 Wahlfächer belegen. Sei S die Anzahl der Studenten die genau ein Wahlfach besuchen, dann gilt:

$$\sum_{s \in E_1} \mathrm{Grad}(s) = 2 * 3 + 5 * 2 + S = 16 + S.$$

Mit der Regel des zweifachen Abzählens können wir S bestimmen da gelten muss:

$$42 = 16 + S \Leftrightarrow S = 26$$

Insgesamt gibt es $26 + 5 + 2 = 33$ Studenten.

3) a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.
Hinweis: Verwendet man die Definition mit fallenden Faktoriellen für den Binomialkoeffizienten ist es weniger leicht zu sehen.

b) Sei n beliebig. Dann erreicht das Produkt $k! \cdot (n-k)!$ seinen *minimalen* Wert bei $k = \frac{n}{2}$. Dies folgt daraus, dass für $k \neq n-k$ entweder $k < n-k$ oder $n-k < k$ gelten muss und der Hinweis besagt, dass bei Dekrementierung des größeren und gleichzeitiger Inkrementierung des kleineren Werts, das Produkt der beiden Fakultäten abnimmt. Folglich erreicht $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ seinen *maximalen* Wert für $k = \frac{n}{2}$.

Der Hinweis folgt sofort aus der Annahme $k \leq n$ in $(k+1)! \cdot n! = (k+1) \cdot k! \cdot n! \leq (n+1) \cdot k! \cdot n! = k! \cdot (n+1)!$.

5) *Lösung.* Da mit dem Satz von Schröder-Bernstein die Existenz einer bijektiven Funktion nachgewiesen werden kann, kann mit ihm auch die Gleichmächtigkeit von Mengen nachgewiesen werden.

a) Die Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \mapsto (n, 1)$ und $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (n, m) \mapsto 2^n 3^m$ sind beide injektiv, also existiert eine bijektive Funktion h zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Damit sind die Mengen gleichmächtig.

b) Analog zu a) mit den Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ und $g : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$

$\square$