1) *Lösung.* In der Induktionsbasis ist T der leere Baum $\varnothing$ und es gilt

$$\mathrm{gr}(T) = \mathrm{gr}(\varnothing) = 0 = \mathrm{len}(\texttt{[]}) = \mathrm{len}(\mathrm{fl}(\varnothing))$$

Im Induktionsschritt haben wir $T = \langle T_1, x, T_2\rangle$ sowie die beiden Induktionshypothesen (IH) $\mathrm{gr}(T_1) = \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T_1))$ und $\mathrm{gr}(T_2) = \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T_2))$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}(T) &= \mathrm{gr}(\langle T_1, x, T_2\rangle) \\
&= 1 + \mathrm{gr}(T_1) + \mathrm{gr}(T_2) && \text{(Definition von gr)} \\
&= 1 + \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T_1)) + \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T_2)) && \text{(IH)} \\
&= 1 + \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T_1) \mathbin{++} \mathrm{fl}(T_2)) && (\star) \\
&= \mathrm{len}(x : (\mathrm{fl}(T_1) \mathbin{++} \mathrm{fl}(T_2))) && \text{(Definition von len)} \\
&= \mathrm{len}(\mathrm{fl}(\langle T_1, x, T_2\rangle)) && \text{(Definition von fl)} \\
&= \mathrm{len}(\mathrm{fl}(T))
\end{aligned}$$

□

2) *Lösung.* Wir betrachten nur einige aufschlussreiche Spezialfälle der Vergleichskette. Betrachte zunächst $\log\log n < \log n$; dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log n}{\log n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\log(e)\ln n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(\log(e)\ln n)\log(e)(1/n)}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \log(e)\frac{1/(\log(e)\ln n)(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log(e)\frac{n}{\log(e) n \ln n} \\
&\lim_{n\to\infty} \log(e)\frac{1}{\log(e)\ln n} = 0\ .
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Gleichung die Regel von l'Hospital angewandt.

Nun betrachten wir $n! < n^n$; hierzu genügt es sich die Definition der Fakultät vor Augen zu führen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot n\cdot 1}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n\cdot n} = \lim_{n\to\infty} 1\cdot(\frac{n-1}{n})\cdot\dots\cdot(\frac{1}{n}) = 0\ .$$

□

3) *Lösung.* Wir verwenden die Definition des Binomialkoeffizienten über die fallende Faktorielle und erhalten

$$m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{n}{2}+1)}{\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}-1)\ldots\cdot 1} = \frac{n}{(\frac{n}{2})}\cdot\frac{n-1}{\frac{n}{2}-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{n}{2}+1}{1}\ .$$

Das Produkt besteht aus $\frac{n}{2}$ Faktoren, von denen jeder ≥ 2 ist. Daher folgt $2^{\frac{n}{2}} \leqslant m$. Da $m = \binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2}$ und der Nenner $(\frac{n}{2}!)^2 \geq 1$ ist, erhalten wir $m \leqslant n!$. □