11) *Lösung.* BASIS ($L = \texttt{[]}$). Dann gilt $L \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} = \texttt{[]} \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} = \texttt{[]}$ auf Grund der ersten Gleichung in der Definition von @.

SCHRITT ($L = x :: L_1$). Laut Induktionshypothese (IH) gilt $L_1 \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} = L_1$. Wir zeigen $L \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} = L$ wie folgt:

$$\begin{aligned} L \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} &= (x :: L_1) \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]} \\ &= x :: (\underline{L_1 \mathbin{\texttt{@}} \texttt{[]}}) && \text{(Definition von @)} \\ &= x :: L_1 && \text{(IH)} \\ &= L \end{aligned}$$

□

12) *Lösung.* Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,d\}$	1	$\{\{a,d\},\{b\},\{c\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{b,g\}$	2	$\{\{a,d\},\{b,g\},\{c\},\{e\},\{f\},\{h\}\}$
$\{c,d\}$	3	$\{\{a,c,d\},\{b,g\},\{e\},\{f\},\{h\}\}$
$\{a,c\}$	4	
$\{a,e\}$	5	$\{\{a,c,d,e\},\{b,g\},\{f\},\{h\}\}$
$\{f,g\}$	6	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g\},\{h\}\}$
$\{c,e\}$	7	
$\{g,h\}$	8	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g,h\}\}$
$\{b,f\}$	9	

Somit ist $W = \{\{a,d\},\{b,g\},\{c,d\},\{a,e\},\{f,g\},\{g,h\}\}$ der einzige spannende Wald mit minimaler Bewertung. □

13) *Lösung.* Die Siebformel für drei Mengen lautet:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)\,.$$

Für die einzelnen Komponenten haben wir:

$$\begin{aligned} \#A &= 6 \\ \#B &= 5 \\ \#C &= 3 \\ \#(A \cap B) &= 2 && \text{da } \#A = 6 \text{ und } \#(A \setminus B) = 4 \\ \#(B \cap C) &= 0 \\ \#(A \cap C) &= 2 \\ \#(A \cap B \cap C) &= 0 && \text{da } \#(B \cap C) = 0 \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir $\#(A \cup B \cup C) = 10$. □

14) *Lösung.* Wir können das Problem als System von Kongruenzen darstellen und dieses mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes lösen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 4 \pmod{6} \\ x &\equiv 6 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Kongruenzen haben wir $x \equiv 2 \cdot 6 \cdot u + 4 \cdot 5 \cdot v \pmod{30}$, sodass $6 \cdot u + 5 \cdot v = 1$. Wir bestimmen die Koeffizienten $u = -4$ und $v = 5$ mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus. Daher gilt, dass $x \equiv 2 \cdot 6 \cdot -4 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \equiv 22 \pmod{30}$. Wenn wir die dritte Kongruenz betrachten, haben wir $x \equiv 22 \cdot 11 \cdot u + 6 \cdot 30 \cdot v \pmod{330}$, sodass $11 \cdot u + 30 \cdot v = 1$. Durch erneute Anwendung des erweiterten euklidischen Algorithmus erhalten wir $u = 11$ and $v = -4$. Wir erhalten $x \equiv 22 \cdot 11 \cdot 11 + 6 \cdot 30 \cdot -4 \equiv 292 \pmod{330}$. Da die Menge an Reis, die zum Markt gebracht wurde, insgesamt weniger als 1000 Kilogramm ist, brachten die Bauern jeweils eine Menge von 292 Kilogramm zum Markt. $\square$

15) *Lösung.*
1. $\hat{\delta}(bbb, bbabb) = \hat{\delta}(bbb, babb) = \hat{\delta}(bbb, abb) = \hat{\delta}(bba, bb) = \hat{\delta}(bab, b) = abb \in F$ zeigt, dass $bbabb \in L(D)$. Ähnlich zeigt $\hat{\delta}(bbb, baa) = baa \notin F$, dass $baa \notin L(D)$.
2. Der Automat ist minimal, da alle Zustände von D erreichbar sind, $\hat{\delta}(bbb, c_1c_2c_3) = c_1c_2c_3$, und der Markierungsalgorithmus zeigt, dass alle Zustände unterscheidbar sind. Letzteres kann gezeigt werden, indem wir erkennen, dass wenn $c_1c_2c_3 \neq c'_1c'_2c'_3$, dann $c_i \neq c'_i$ für ein beliebiges i. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $c_i = a$ und $c'_i = b$, und können *alle* Wörter mit Länge $i - 1$ davon unterscheiden: $\hat{\delta}(c_1c_2c_3, w) = c_i \ldots c_3w = a \ldots c_3w \in F$, aber $\hat{\delta}(c'_1, c'_2, c'_3, w) = c'_i \ldots c'_3w = b \ldots c'_3w \notin F$.

$\square$

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n-i-j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^2\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n+j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n + j) + 0 \nleqslant n$. Somit ist L nicht regulär. $\square$