11) *Lösung.* Durch direktes Rechnen weist man nach, dass die Gleichung für $n = 0$ und $n = 1$ stimmt. Sei $n > 1$. Wenn wir annehmen, dass die Gleichung für $n-1$ und $n-2$ gilt, dann haben wir: $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} = 2\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}} - 2\frac{(1-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}} + \frac{(1+\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}}$. Zählen wir das erste und dritte Glied der letzten Summe zusammen, so erhalten wir:

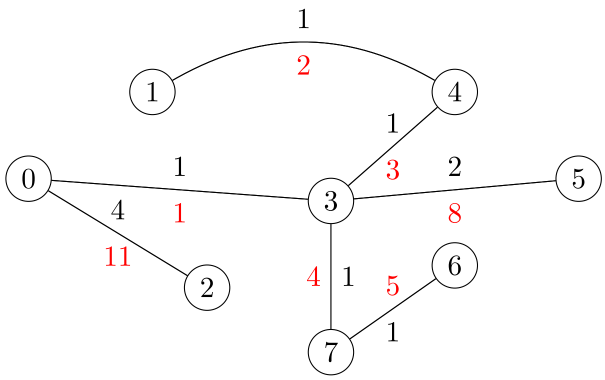
$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}} \cdot (2 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2})^2.$$

Zählen wir das zweite und vierte Glied zusammen, so erhalten wir ähnlich:

$$-\frac{(1-\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}} \cdot (2 - 2\sqrt{2} + 1) = -\frac{(1-\sqrt{2})^{n-2}}{2\sqrt{2}} \cdot (1-\sqrt{2})^2.$$

Gemäß dem Prinzip der mathematischen Induktion (genauer, der wohlfundierten Induktion) folgt, dass die gegebene Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

12) *Lösung.*



□

13) *Lösung.* Wir berechnen zuerst den größten gemeinsamen Teiler von 169 und 280 mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus:

A	B	q
$(280, 1, 0)$	$(196, 0, 1)$	1
$(196, 0, 1)$	$(84, 1, -1)$	2
$(84, 1, -1)$	$(28, -2, 3)$	

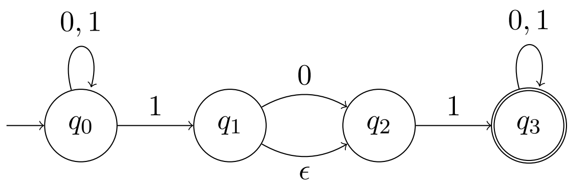
Damit ist $u = -2$, $v = 3$ und $-2 \cdot 280 + 3 \cdot 196 = 28$. □

14) *Lösung.* Wir können das Problem als System von Kongruenzen darstellen und dieses mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes lösen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{8} \\ x &\equiv 8 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Kongruenzen haben wir $x \equiv 3 \cdot 8 \cdot u + 5 \cdot 5 \cdot v \pmod{40}$, sodass $8 \cdot u + 5 \cdot v = 1$. Wir bestimmen die Koeffizienten $u = -3$ und $v = 5$ mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus. Daher gilt, dass $x \equiv 3 \cdot 8 \cdot -3 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv 13 \pmod{40}$. Wenn wir die dritte Kongruenz betrachten, haben wir $x \equiv 13 \cdot 13 \cdot u + 8 \cdot 40 \cdot v \pmod{520}$, sodass $13 \cdot u + 40 \cdot v = 1$. Durch erneute Anwendung des erweiterten euklidischen Algorithmus erhalten wir $u = -3$ and $v = -1$. Wir erhalten $x \equiv 13 \cdot 13 \cdot -3 + 8 \cdot 40 \cdot 1 \equiv 333 \pmod{520}$. Da die Menge an Reis, die zum Markt gebracht wurde, insgesamt weniger als 1000 Kilogramm ist, brachten die Bauern jeweils eine Menge von 333 Kilogramm zum Markt. □

15) *Lösung.*



□

16) *Lösung.* 1. $\hat{\delta}(bbb, bbabb) = \hat{\delta}(bbb, babb) = \hat{\delta}(bbb, abb) = \hat{\delta}(bba, bb) = \hat{\delta}(bab, b) = abb \in F$ zeigt, dass $bbabb \in L(D)$. Ähnlich zeigt $\hat{\delta}(bbb, baa) = baa \notin F$, dass $baa \notin L(D)$.

2. Der Automat ist minimal, da alle Zustände von D erreichbar sind, $\hat{\delta}(bbb, c_1c_2c_3) = c_1c_2c_3$, und der Markierungsalgorithmus zeigt, dass alle Zustände unterscheidbar sind. Letzteres kann gezeigt werden, indem wir erkennen, dass wenn $c_1c_2c_3 \neq c'_1c'_2c'_3$, dann $c_i \neq c'_i$ für ein beliebiges i. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $c_i = a$ und $c'_i = b$, und können *alle* Wörter mit Länge $i - 1$ davon unterscheiden: $\hat{\delta}(c_1c_2c_3, w) = c_i \dots c_3w = a \dots c_3w \in F$, aber $\hat{\delta}(c'_1, c'_2, c'_3, w) = c'_i \dots c'_3w = b \dots c'_3w \notin F$.

□