1. Welche der folgenden Aussagen zur Komplexitätstheorie ist falsch?

A. Das Problem Maze ist in polynomieller Zeit auf einer NTM lösbar.

B. Jedes Problem in P kann durch einen Polynomzeit Verifikator gelöst werden.

C. Der Begriff der Vollständigkeit einer Klasse ist parametrisch in der angewandten Definition von Reduktion.

D. Es ist nicht bekannt, ob die Komplexitätsklasse NP unter Komplement abgeschlossen ist.

E. Es gibt einen Algorithmus der das TSP Problem in Platz $O(n^2)$ entscheidet.

F. Die Klasse NP ist genau die Klasse der Probleme, die Nicht in Polynomieller Zeit auf einer Turingmaschine gelöst werden können.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zur Entscheidbarkeit beziehungsweise Unentscheidbarkeit ist richtig?

A. Jede unendliche Sprache ist nicht rekursiv.

B. Eine Menge oder ihr Komplement sind rekursiv aufzählbar.

C. Das Zugehörigkeitsproblem (MP) einer Turingmaschine ist entscheidbar.

D. Wenn A rekursiv ist, dann ist $\sim A$ nicht rekursiv aufzählbar.

E. Es gibt eine rekursiv aufzählbare Menge, die nicht rekursiv ist.

---

3. Welche der folgenden Sprachen (über dem Alphabet $\{0, 1\}$) kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden?

A. $\{0^n 1^m \mid \text{wobei } n \neq m\}$.

B. $\{1^n 0^m \mid \text{wobei } n < m\}$.

C. $\{0^n 1 0^{n+1} \mid n \text{ eine Primzahl}\}$.

D. $\{0^n 1^n \mid \text{wobei } n \geqslant 0\}$.

E. $\{0^n 1^n \mid \text{wobei } 10 \leqslant n\}$.

F. $\{0^n 0^n \mid \text{wobei } n \geqslant 0\}$.

---

4. Sei n eine positive ganze Zahl und sei a eine ganze Zahl ungleich null. Welches der folgenden Kriterien ist äquivalent zur Invertierbarkeit der Restklasse von a modulo n ?

A. n ist eine Primzahl.

B. a ist eine Primzahl.

C. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und n ist gleich dem Maximum von a und n .

D. Der größte gemeinsame Teiler von a und n ist ungleich 1 .

E. Der größte gemeinsame Teiler von a und n ist 1 .

---

5. Welcher der folgenden Algorithmen ist ein Divide-and-Conquer-Algorithmus?

A. der Algorithmus von Kruskal

B. der Algorithmus von Floyd-Warshall

C. der erweiterte euklidische Algorithmus

D. der euklidische Algorithmus

E. der Merge-Sort Algorithmus

---

6. Welche der folgenden Mengen ist nicht abzählbar?

A. $\mathbb{N}^n$

B. $\mathbb{Z}$

C. $\mathbb{Q}$

D. $\{0, 1\}^*$

E. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

---

7. Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer Menge mit drei Elementen?

A. 6

B. 12

C. 8

D. 3

E. 7

F. 5

---

8. Seien f und g Funktionen von natürlichen Zahlen, die positive reelle Werte annehmen. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage $f \in \Theta(g)$?

A. $f \in \mathrm{O}(g)$ oder $f \in \Omega(g)$

B. $f \notin \mathrm{O}(g)$ und $f \notin \Omega(g)$

C. $f \notin \mathrm{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$

D. $f \in \mathrm{O}(g)$ und $f \notin \Omega(g)$

E. $f \in \mathrm{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$

---

9. Sei G ein Baum mit $n > 0$ Ecken. Wieviele Kanten hat G?

A. $(n+1)^2$

B. $(n-1)^2$

C. n^2

D. $n+1$

E. n

F. $n-1$

---

10. Sei $\mathbb{N}^2$ mit der graduiert-lexikographischen Ordnung versehen. Wieviele unmittelbare (dh. größtmögliche) Vorgänger hat das Paar $(2, 2)$ in $\mathbb{N}^2$?

A. 0

B. 9

C. 8

D. 2

E. 1

---

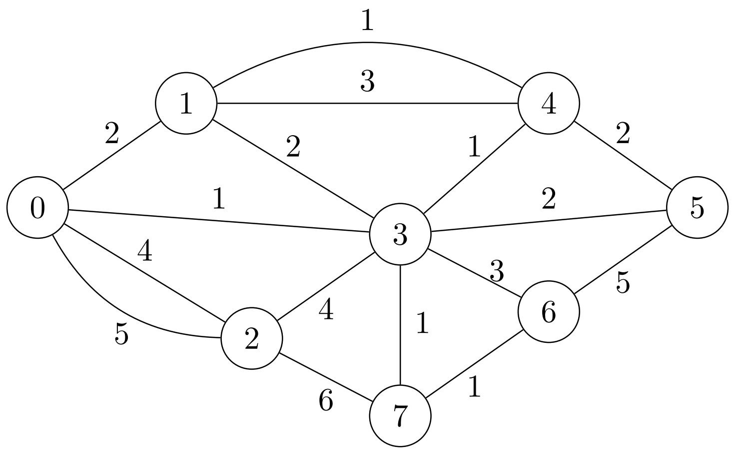
11. Die *Pell-Folge* $P_0, P_1, \ldots$ wird wie folgt definiert: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, und $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ für jedes $n > 1$.

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \quad .$$

[10 Punkte]

12. Berechnen Sie mittels des Algorithmus von Kruskal einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung für den folgenden Graphen G:



[10 Punkte]

13. Berechnen Sie mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus aus der Vorlesung den größten gemeinsamen Teiler t von $a = 196$ und $b = 280$, sowie ganze Zahlen u und v, sodass $u \cdot a + v \cdot b = t$. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte (also die Inhalte der Tripel A und B aus dem Algorithmus) an.

[10 Punkte]

---

14. [Ch'in Chiu-Shao] Drei Bauern teilen den Reis, den sie anbauen, gleichmäßig. Einer der Bauern geht zum Markt, wo ein Gewicht mit 5 Kilogramm verwendet wird, einer zum Markt mit dem 8 Kilogramm Gewicht, und der dritte zum Markt mit dem 13 Kilogramm Gewicht. Die Bauern verkaufen Reis nur im vollen Maß. Als sie heimkommen, hat der erste 3 Kilogramm, der zweite 5 Kilogramm, und der dritte 8 Kilogramm übrig.

Die Bauern brachten insgesamt weniger als 1000 Kilogramm Reis zum Markt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes die Menge an Reis, welche die Bauern jeweils zum Markt brachten.

[10 Punkte]

---

15. Konstruieren Sie einen NEA, der die folgende Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$ akzeptiert:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } 101 \text{ oder } 11 \text{ (oder beide)}\} \quad .$$

[10 Punkte]

---

16. Betrachten Sie die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{das drittletzte Symbol in } w \text{ ist ein } a\} \quad .$$

Zum Beispiel: $aaa, aba, bbabb \in L$, aber $ab, baa, aaaabbb \notin L$. Sei $L = L(D)$ für den DEA

$$D = (\{c_1c_2c_3 \mid c_i \in \Sigma\}, \Sigma, \delta, bbb, F) \quad ,$$

mit $F = \{ac_2c_3 \mid c_i \in \Sigma\}$ und δ gegeben durch $\delta(c_1c_2c_3, c_4) = c_2c_3c_4$ für $c_i \in \Sigma$.

a) Zeigen Sie, dass $bbabb \in L(D)$, aber $baa \notin L(D)$. [4 Punkte]

b) Zeigen Sie, dass D ein minimaler DEA für L ist. [6 Punkte]

ANSWERKEY FOR "versionU"

Version 1: F E F E E E F E F E