universität innsbruck

Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch David Obwaller
Burak Ekici Vincent van Oostrom
Johannes Koch Oleksandra Panasiuk
Georg Moser
cbr.uibk.ac.at

Organisation

Zeitplan

Woche 1	5. März	Woche 8	7. Mai
Woche 2	12. März	Woche 9	14. Mai
Woche 3	19. März	Woche 10	21. Mai
Woche 4	26. März	Woche 11	28. Mai
Woche 5	2. April	Woche 12	4. Juni
Woche 6	9. April	Woche 13	11. Juni
Woche 7	30. April	Woche 14	18. Juni
		1te Klausur	25. Juni

Zeit und Ort

Vorlesung	Dienstag, 9:15–11:45, HS F (am 9. April HS D)	Georg Moser
Tutorium	Dienstag, 17:15-18:00, RR 19	Johannes Koch

in der Vorlesung und im Tutorium besteht keine Anwesenheitspflicht

Literatur

1. Skriptum

Online-Lehrmittel

2. Skriptum wurde überarbeitet und ist diese Woche noch bei Studia und innerhalb des Universitätsnetzes verfügbar; diesmal mit ausgewählten Lösungen
3. Folien und Hausaufgaben sind auf der LVA-Homepage abrufbar
4. Folien sind vor der Vorlesung online
5. Ausgewählte Lösungen werden verfügbar gemacht, nachdem sie in den Proseminargruppen besprochen wurden

Proseminar

Zeit und Ort des Proseminars

Gruppe 1	Montag, 11:15–12:45, HSB 4	Vincent van Oostrom
Gruppe 2	Montag, 11:15–12:45, SR 13	Oleksandra Panasiuk
Gruppe 3	Montag, 13:15–14:45, SR 13	Ralph Bottesch
Gruppe 4	Montag, 13:15–14:45, SR 12	David Obwaller
Gruppe 5	Montag, 11:15–12:45, HS 11	Burak Ekici

Proseminar

1. Im Proseminar herrscht Anwesenheitspflicht
2. Zweimaliges unentschuldigtes Fehlen wird toleriert
3. Das Proseminar beginnt am 11. März und endet am 17. Juni
4. Kein Proseminartest; das Proseminar dient der Einübung des Stoffes
5. Fünf Aufgaben jede Woche, 13 Termine

Prüfungsmodus in Vorlesung & Proseminar

Klausur

1. Die erste Vorlesungsprüfung findet am 25. Juni statt
2. Die Prüfung ist closed-book
3. Die Klausurvorbereitung findet im Tutorium statt

Notenschlüssel für Klausur und Proseminar

Punkte	$\geqslant 90$	$\geqslant 75$	$\geqslant 60$
Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend
Punkte	$\geqslant 50$	< 50	
Note	Genügend	Nicht Genügend	

Punkteberechnung im Proseminar

Algorithmus

1. 50% der Aufgaben müssen angekreuzt werden
2. Proseminarnote basiert auf
   1. Prozentzahl der angekreuzten Beispiele
   2. Mitarbeit & Tafelleistung
3. Jeder Teil wird wie folgt gewertet
   1. 100% gekreuzt = 65 Punkte
   2. Top Mitarbeit- und Tafelleistung = 35 Punkte
4. Bei kontinuierlich schlechter Tafelleistung können Mitarbeitspunkte auch negativ sein
5. Die Punkte werden mit Hilfe des Notenschlüssels auf Noten abgebildet

Feedback Sommersemester 2018

Zur Verbesserung der LVA möchte ich folgende Anregung geben (Auszug)

- für manche Themen wäre eine „übergeordnete“ Mindmap oft sinnvoll
- Foliensätze und PS Zettel früher hochladen
- etwas schöner und größer schreiben!
- besser zuhören wenn Studeriende Fragen stellen; es kommt nicht selten zu Missverständnissen!
- besser auf VO vorbereiten; PS: klarere Aufgabenstellungen
- vollständige Folien hochladen und nicht schrittweise wie in der Präsentation
- mehr Erklärungen zu manchen Abkürzungen
- mehrere Beispiele, zB. Beweise

Feedback Sommersemester 2018 (Fortsetzung)

Gut gefallen hat mir bei dieser LVA (Auszug)

- nett, spannend & engagiert
- PS+VO sehr gut gestaltet
- Humor vom Professor
- motivierter Vortragender (verwirrt sich manchmal selber)
- Skriptum und LV sehr wissenschaftlich gestaltet, oft schwer zu folgen und verstehen

Einleitung

Diskrete Mathematik

Alle Begriffe der diskreten Mathematik werden aus den Begriffen „Menge“ und „Abbildung“ abgeleitet, also etwa

- Numerierung
- Ordnung
- Graph
- Automat
- etc.

Eine Kernaufgabe der (diskreten) Mathematik bzw. (theoretischen) Informatik ist das Schaffen von präzisen Grundlagen, sprich exakten Definitionen

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont'd)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschossenheit, Schleifenlemma

Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerien von Objekten, Abzählbarkeit, Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Logisches Schließen

Beispiel

Großbritannien ist kein Königreich und die Queen ist ein Mann. Stimmt es dann, dass ein Mann die Queen ist?

Ja? ☐ Nein? ☑ ✓

Beispiel

Die Nächte sind im Sommer immer hell.
Im Sommer sind die Tage immer Winter.
Im Winter sind die Tage immer dunkel.

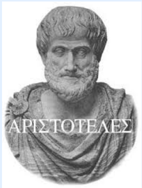
Stimmt es dann, dass die Tage im Winter dunkel sind?

Ja? ✓ Nein? ☐

Aristoteles sagte

Topik I 1, 100a25-27

Eine Deduktion (syllogismos) ist also ein Argument, in welchem sich, wenn etwas gesetzt wurde, etwas anderes als das Gesetzte mit Notwendigkeit durch das Gesetzte ergibt



Modus Ponens

Beispiel

Wenn das Kind schreit, hat es Hunger
Das Kind schreit
Also, hat das Kind Hunger

Fakt

Korrektheit dieser Schlussfigur ist unabhängig von den konkreten Aussagen

Definition (Modus Ponens)

Wenn A, dann B
A gilt
Also, gilt B

Beispiel

Sokrates ist ein Mensch	}	Prämisse ①
Alle Menschen sind sterblich	}	Prämisse ②
Somit ist Sokrates sterblich	}	Konklusion

Definition

- Schlussfiguren dieser Art heißen Syllogismen
- Syllogismen wurden bereits im antiken Griechenland untersucht, Grundlage der modernen Logik

Fakt

Nicht die Wahrheit der Prämissen, oder der Konklusion, sondern die Wahrheit der Schlussfigur ist entscheidend

Wozu Beweise?

Antwort

- sich selbst und andere überzeugen, dass richtig überlegt wurde; laut Kurt Gödel bedeutet „beweisen" nichts anderes als richtig denken
- logische Denken wird trainiert, was dazu führt dass überflüssige Voraussetzung, falsche Argumente schneller erkannt werden
- Beweise führen oft zu programmierbaren Verfahren
- In sicherheitskritischen Anwendungen (Auto, Flugzeug, Medizin) gefährdet fehlerbehaftete Software Menschen. Es ist unabdingbar, bestimmte Eigenschaften von Programmen formal zu verifizieren.

Definition (Beweisformen)

Beweisformen sind etwa (i) deduktive Beweise (ii) Beweise von Mengeninklusionen (iii) Kontraposition (iv) indirekte Beweise (v) induktive Beweise (vi) Gegenbeispiele

Deduktive Beweise

Definition

- Ein deduktiver Beweis besteht aus einer Folge von Aussagen, die von einer Hypothese zu einer Konklusion führen.
- Jeder Beweisschritt muss sich nach einer akzeptierten logischen Regel aus den gegebenen Fakten oder aus vorangegangenen Aussagen ergeben.
- Der Aussage, dass die Folge der Beweisschritte von einer Hypothese H zu einer Konklusion K führt, entspricht der Satz:

  Wenn H, dann K.

Beispiel

Sei n eine natürliche Zahl. Die Aussage

„*n ist ein Vielfaches von* 9 $\Rightarrow$ *n ist ein Vielfaches von* 3"

ist wahr (und somit ein Satz).

Definition

Gelegentlich finden wir Aussagen der Form

$$F \text{ genau dann wenn } G.$$

Diese Aussagen zeigt man in dem „Wenn F, dann G." und „Wenn G, dann F." bewiesen wird.

Definition

Alternative Formulierungen sind etwa:

- F dann und nur dann, wenn G.
- F ist äquivalent zu G.
- $F \Leftrightarrow G$.

Beispiel

Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt: „n ist gerade $\Leftrightarrow n+1$ ist ungerade."

Mengeninklusionen

Definition

Seien A und B Mengen. Um die Teilmengeneigenschaft (Inklusion)

$$A \subseteq B$$

zu zeigen, genügt es nach der Definition, die folgende „Wenn-dann"-Aussage zu beweisen:

$$\text{Wenn } x \in A, \text{ dann } x \in B\,.$$

Definition

Die Gleichheit von Mengen A und B kann bewiesen werden, indem man zwei Behauptungen zeigt:

- Wenn $x \in A$, dann $x \in B$.
- Wenn $x \in B$, dann $x \in A$.

Kontraposition

Definition

Die Aussage

„Wenn H, dann K."

und

ihre Kontraposition

„Wenn (nicht K), dann (nicht H)."

sind äquivalent, d.h. aus dem einen Satz folgt der andere und umgekehrt.

Beispiel

Die Kontraposition der Aussage

„es regnet $\Rightarrow$ die Straße ist nass"

ist

„die Straße ist trocken $\Rightarrow$ es regnet nicht"

Indirekte Beweise bzw. Widerspruchsbeweise

Definition

- Um zu zeigen, dass eine Aussage A gilt, nehmen Widerspruchsbeweise an, dass die Negation von A gilt.
- Kann aus der Annahme (dass die Negation von A gilt, also, dass A falsch ist) ein Widerspruch abgeleitet werden, so muss die Annahme selbst falsch sein und somit A gelten.

Beispiel

Die Aussage

„Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen."

ist

wahr (und somit ein Satz). Um dies zu zeigen, nehmen wir die Negation des Satzes an, also

„Es gibt nur endlich viele natürliche Zahlen."

Widerlegung durch ein Gegenbeispiel

Definition

- Wenn Sätze allgemeine Aussagen behandeln, genügt es, die Aussage für bestimmte Werte zu widerlegen, um den Satz zu widerlegen.
- In dieser Situation haben wir dann ein Gegenbeispiel gefunden. Gegenbeispiele können auch verwendet werden, um allgemein gefasste Aussagen so weit einzuschränken, dass sie dann als Satz gezeigt werden können.

Beispiel

Wir betrachten die (falsche) Aussage

„Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n^2 \geqslant 2n$ *, aber* $1^2 \ngeqslant 2 \cdot 1$ *"*