universität innsbruck

Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch
Burak Ekici
Johannes Koch
Georg Moser
David Obwaller
Vincent van Oostrom
Oleksandra Panasiuk

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, sodass

- Q eine endliche Menge von Zustände
- Σ eine endliche Menge, das Eingabealphabet; dessen Elemente Eingabezeichen genannt werden,
- die Zustandsübergangsfunktion

  $$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

  gibt an wie sich der Zustand des Automaten bei einer Eingabe ändern kann
- $S \subseteq Q$, deren Elemente Startzustände genannt werden,
- $F \subseteq Q$, deren Elemente akzeptierende Zustände genannt werden

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont'd)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschossenheit, Schleifenlemma

Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont’d)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschossenheit, Schleifenlemma

Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Teilmengenkonstruktion

Definition

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ ein NEA; dann ist $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ ein DEA, wobei

1. Q_D ist die Menge der Teilmengen von Q_N, also $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
2. Für alle $P \in Q_D$ und $a \in \Sigma$
$$\delta_D(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta_N(p, a)\,.$$
3. F_D ist die Menge $\{P \subseteq Q_N \mid P \cap F_N \neq \varnothing\}$

Teilmengenkonstruktion

Definition

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ ein NEA; dann ist $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ ein DEA, wobei

1. Q_D ist die Menge der Teilmengen von Q_N, also $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
2. Für alle $P \in Q_D$ und $a \in \Sigma$
$$\delta_D(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta_N(p, a)\,.$$
3. F_D ist die Menge $\{P \subseteq Q_N \mid P \cap F_N \neq \varnothing\}$

Satz

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ *ein NEA und* $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ *der durch die Teilmengenkonstruktion berechnete DEA; dann* $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$

Beispiel

Für den NEA N liefert die Teilmengenkonstruktion den folgenden DEA:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Beispiel

Für den NEA N liefert die Teilmengenkonstruktion den folgenden DEA:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Folgerung

L wird von einem DEA akzeptiert gdw L von einem NEA akzeptiert wird

Satz (Erinnerung)

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ ein NEA und $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ der durch die Teilmengenkonstruktion berechnete DEA; dann $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$

Satz (Erinnerung)

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ ein NEA und $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ der durch die Teilmengenkonstruktion berechnete DEA; dann $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$

Beweis.

- wir beweisen mit struktureller Induktion für $x \in \Sigma^*$ und $P \subseteq Q_N$ beliebig, dass
$$\hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$$

Satz (Erinnerung)

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S, F_N)$ ein NEA und $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S, F_D)$ der durch die Teilmengenkonstruktion berechnete DEA; dann $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$

Beweis.

- wir beweisen mit struktureller Induktion für $x \in \Sigma^*$ und $P \subseteq Q_N$ beliebig, dass
$$\hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$$
- daraus folgt: **Definition** $\mathrm{L}(D), \mathrm{L}(N)$
$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(D) &= \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_D(S, x) \in F_D\} \\
&= \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_D(S, x) \in \{P \subseteq Q_N \mid P \cap F_N \neq \varnothing\}\} \\
&= \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_D(S, x) \cap F_N \neq \varnothing\} \\
&= \{x \in \Sigma^* \mid \bigcup_{s \in S} \hat{\delta}_N(s, x) \cap F_N \neq \varnothing\} = \mathrm{L}(N)
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x\colon \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P, \epsilon) = P = \bigcup_{p \in P} \{p\}$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P, \epsilon) = P = \bigcup_{p \in P} \{p\} = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, \epsilon)$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P, \epsilon) = P = \bigcup_{p \in P} \{p\} = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, \epsilon)$$

2. Schritt:

   sei $x = ya$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P, \epsilon) = P = \bigcup_{p \in P} \{p\} = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, \epsilon)$$

2. Schritt:

   sei $x = ya$

$$\hat{\delta}_D(P, ya) = \delta_D(\hat{\delta}_D(P, y), a)$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x: \hat{\delta}_D(P,x) = \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P,\epsilon) = P = \bigcup_{p\in P}\{p\} = \bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,\epsilon)$$

2. Schritt:

   sei $x = ya$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_D(P,ya) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(P,y),a)\\ &= \delta_D(\bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,y),a)\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x$: $\hat{\delta}_D(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P, \epsilon) = P = \bigcup_{p \in P} \{p\} = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, \epsilon)$$

2. Schritt:

sei $x = ya$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_D(P, ya) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(P, y), a) \\
&= \delta_D(\bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p, y), a) \\
&= \bigcup_{q \in \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}_N(p,y)} \delta_N(q, a)
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x\colon \hat{\delta}_D(P,x) = \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,x)$:

Definition $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P,\epsilon) = P = \bigcup_{p\in P} \{p\} = \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,\epsilon)$$

2. Schritt:

sei $x = ya$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_D(P,ya) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(P,y),a) \\
&= \delta_D(\bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,y),a) \\
&= \bigcup_{q\in \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,y)} \delta_N(q,a) = \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,ya)
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung).

wir zeigen $\forall x\colon \hat{\delta}_D(P,x) = \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}_N(p,x)$: **Definition** $\hat{\delta}_D, \hat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\hat{\delta}_D(P,\epsilon) = P = \bigcup_{p\in P}\{p\} = \bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,\epsilon)$$

2. Schritt:

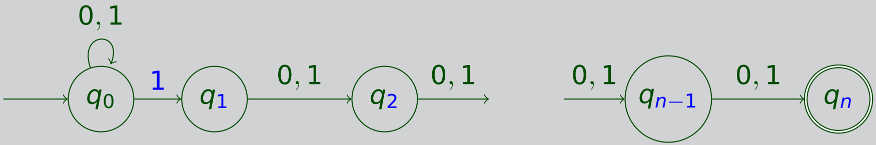
sei $x = ya$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_D(P,ya) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(P,y),a)\\ &= \delta_D(\bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,y),a)\\ &= \bigcup_{q\in\bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,y)} \delta_N(q,a) = \bigcup_{p\in P}\hat{\delta}_N(p,ya)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

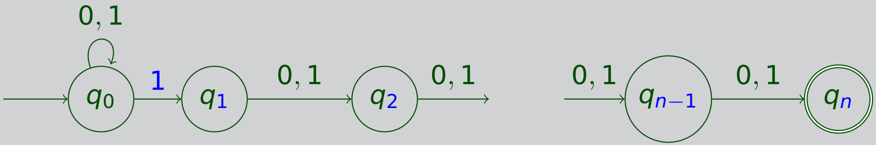
Beispiel

betrachte den folgenden NEA :



Beispiel

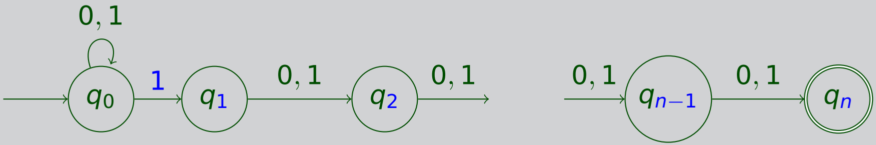
betrachte den folgenden NEA :



1. der NEA N akzeptiert die Sprache $\{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$

Beispiel

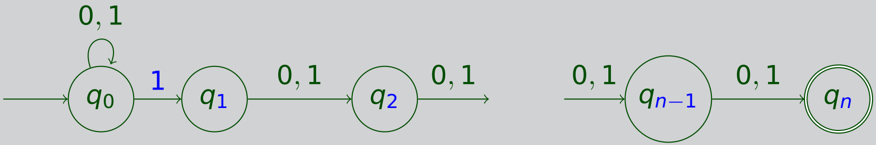
betrachte den folgenden NEA :



1. der NEA N akzeptiert die Sprache $\{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$
2. angenommen existiert DEA D, sodass $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$
3. D muss sich die n letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann

Beispiel

betrachte den folgenden NEA :



1. der NEA N akzeptiert die Sprache $\{x1y \mid \ell(y) = n-1\}$
2. angenommen existiert DEA D, sodass $L(D) = L(N)$
3. D muss sich die n letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann
4. dafür gibt es 2^n Möglichkeiten

   D muss also zumindest 2^n Zustände haben

Beobachtung

- sei N ein NEA mit $|\delta_N(q,a)| \leqslant 1$ für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$
- wir führen einen neuen Zustand f ($Q \cap \{f\} = \varnothing$), den Fangzustandes ein
- und erweiteren die Übergangsfunktion

$$\delta'(q,a) := \begin{cases} \delta_N(q,a) & q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q,a)| = 1 \\ \{f\} & (q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q,a)| = 0) \ \text{ oder } \ q = f \end{cases}$$

- wir erhalten einen NEA N', der dieselbe Sprache wie N akzeptiert
- es is leicht einzusehen, dass der NEA N' äquivalent zu einem DEA ist

Konvention

wir bezeichnen auch Automaten mit höchstens einem Folgezustand pro Eingabezeichen als deterministisch

Endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen

Definition

Ein ϵ-NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ist gegeben durch

- eine endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen,
- eine endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und ϵ nicht enthält
- eine Abbildung
$$\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$$
die Zustandsübergangsfunktion heißt, und angibt wie sich der Zustand eines Automaten bei einer Eingabe oder spontan ändern kann
- eine Teilmenge $S \subseteq Q$, deren Elemente Startzustände genannt werden
- eine Teilmenge $F \subseteq Q$, deren Elemente akzeptierende Zustände genannt werden

Endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen

Definition

Ein ϵ-NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ist gegeben durch

- eine endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen,
- eine endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und ϵ nicht enthält
- eine Abbildung
$$\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$$
  die Zustandsübergangsfunktion heißt, und angibt wie sich der Zustand eines Automaten bei einer Eingabe oder spontan ändern kann
- eine Teilmenge $S \subseteq Q$, deren Elemente Startzustände genannt werden
- eine Teilmenge $F \subseteq Q$, deren Elemente akzeptierende Zustände genannt werden

Beispiel

Sei ϵ-NEA N gegeben durch:

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Beispiel

Sei ϵ-NEA N gegeben durch:

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA. Die ϵ-Hülle einer Menge $P \subseteq Q$ ist induktiv definiert:

- Basis: Für alle $p \in P$ gilt $p \in \epsilon\text{-Hülle}(P)$.

Beispiel

Sei ϵ-NEA N gegeben durch:

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA. Die ϵ-Hülle einer Menge $P \subseteq Q$ ist induktiv definiert:

- Basis: Für alle $p \in P$ gilt $p \in \epsilon$-Hülle(P).
- Schritt: Wenn $p \in \epsilon$-Hülle(P) dann ist $\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon$-Hülle$(P)$.

Lemma

Sei $f: Q \to \mathcal{P}(Q)$ eine Abbildung und $P \subseteq Q$; dann gilt

$$\epsilon\text{-}\mathit{H\ddot{u}lle}\Big(\bigcup_{p \in P} f(p)\Big) = \bigcup_{p \in P} \epsilon\text{-}\mathit{H\ddot{u}lle}(f(p))$$

Lemma

Sei $f\colon Q \to \mathcal{P}(Q)$ eine Abbildung und $P \subseteq Q$; dann gilt

$$\epsilon\text{-}\mathit{Hülle}\Big(\bigcup_{p \in P} f(p)\Big) = \bigcup_{p \in P} \epsilon\text{-}\mathit{Hülle}(f(p))$$

Definition

Sei $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; die erweiterte Zustandsübergangsfunktion

$$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

ist induktiv definiert:

- Basis: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$(\{q\})$.

Lemma

Sei $f\colon Q \to \mathcal{P}(Q)$ eine Abbildung und $P \subseteq Q$; dann gilt

$$\epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{p\in P} f(p)\Big) = \bigcup_{p\in P} \epsilon\text{-Hülle}(f(p))$$

Definition

Sei $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; die erweiterte Zustandsübergangsfunktion

$$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

ist induktiv definiert:

- Basis: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$(\{q\})$.
- Schritt: Wenn $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$,

Lemma

Sei $f\colon Q \to \mathcal{P}(Q)$ eine Abbildung und $P \subseteq Q$; dann gilt

$$\epsilon\text{-}\mathit{H\ddot{u}lle}\Big(\bigcup_{p\in P} f(p)\Big) = \bigcup_{p\in P} \epsilon\text{-}\mathit{H\ddot{u}lle}(f(p))$$

Definition

Sei $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; die erweiterte Zustandsübergangsfunktion

$$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

ist induktiv definiert:

- Basis: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$(\{q\})$.
- Schritt: Wenn $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$, dann

$$\hat{\delta}(q, xa) = \epsilon\text{-Hülle}(\{r_1, \ldots, r_m\})$$

Lemma

Sei $f\colon Q \to \mathcal{P}(Q)$ eine Abbildung und $P \subseteq Q$; dann gilt

$$\epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{p\in P} f(p)\Big) = \bigcup_{p\in P} \epsilon\text{-Hülle}(f(p))$$

Definition

Sei $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; die erweiterte Zustandsübergangsfunktion

$$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

ist induktiv definiert:

- Basis: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$(\{q\})$.
- Schritt: Wenn $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$, dann

$$\hat{\delta}(q, xa) = \epsilon\text{-Hülle}(\{r_1, \dots, r_m\}) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{p\in\hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\Big)$$

Beispiel (Fortsetzung)

Betrachte

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Beispiel (Fortsetzung)

Betrachte

	0	1	2	ϵ
$\to q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

dann gilt

$$\hat{\delta}(q_0, 2) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, \epsilon)} \delta(p, 2)\Big) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\})} \delta(p, 2)\Big)$$

$$= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q_0, 2)) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_2\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

somit

$$\hat{\delta}(q_0, 21) = \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1))$$
$$= \epsilon\text{-Hülle}(\{q_1, q_2\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; dann ist

$$\mathrm{L}(N) := \{x \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt einen Zustand } s \in S \text{, sodass } \hat{\delta}(s, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

die von N akzeptierte Sprache

Definition

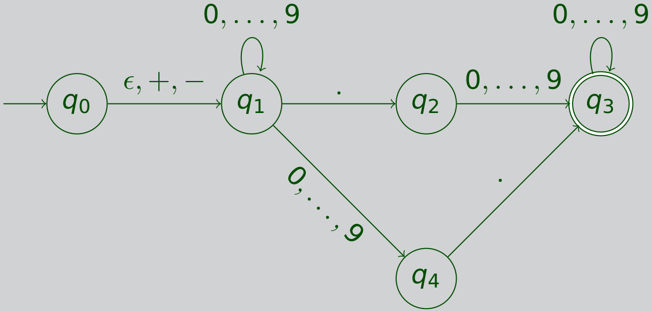
Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein ϵ-NEA; dann ist

$$\mathsf{L}(N) := \{x \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt einen Zustand } s \in S\text{, sodass } \hat{\delta}(s, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

die von N akzeptierte Sprache

Beispiel

ϵ-NEA, der die Menge der Gleitkommazahlen akzeptiert:



Satz

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ *ein* ϵ*-NEA und* $N' = (Q, \Sigma, \delta', S', F)$ *ein NEA, wobei*

- $S' = \epsilon\text{-Hülle}(S)$
- $\delta'(q, a) := \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q, a)) \qquad \text{für alle } a \in \Sigma \text{ und } q \in Q\,.$

Dann ist $\mathrm{L}(N) = \mathrm{L}(N')$

Satz

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ *ein* ϵ*-NEA und* $N' = (Q, \Sigma, \delta', S', F)$ *ein NEA, wobei*

- $S' = \epsilon\text{-}\mathit{Hülle}(S)$
- $\delta'(q, a) := \epsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(q, a)) \qquad$ *für alle* $a \in \Sigma$ *und* $q \in Q$.

Dann ist $\mathrm{L}(N) = \mathrm{L}(N')$

Beweis.

für alle $q \in Q$, $x \in \Sigma^*$ gilt: $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p, x)$

Satz

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ *ein* ϵ*-NEA und* $N' = (Q, \Sigma, \delta', S', F)$ *ein NEA, wobei*

- $S' = \epsilon\text{-Hülle}(S)$
- $\delta'(q, a) := \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q, a))$ *für alle* $a \in \Sigma$ *und* $q \in Q$.

Dann ist $\mathrm{L}(N) = \mathrm{L}(N')$

Beweis.

für alle $q \in Q$, $x \in \Sigma^*$ gilt: $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p, x)$ somit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(N) &= \{x \in \Sigma^* \mid \text{es gibt ein } s \in S \text{ mit } \hat{\delta}(s, x) \cap F \neq \varnothing\} \\
&= \{x \in \Sigma^* \mid \text{es gibt ein } s \in S \text{ mit } \Bigg(\bigcup_{s' \in \epsilon\text{-Hülle}(\{s\})} \widehat{\delta'}(s', x) \Bigg) \cap F \neq \varnothing\} \\
&= \{x \in \Sigma^* \mid \text{es gibt ein } s \in S' \text{ mit } \widehat{\delta'}(s, x) \cap F \neq \varnothing\} \\
&= \mathrm{L}(N')
\end{aligned}$$

Fortsetzung.

- $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p, x)$ folgt mittels (struktureller) Induktion nach x

Fortsetzung.

- $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p, x)$ folgt mittels (struktureller) Induktion nach x
- wir schreiben

$$\hat{\delta}(P, x) := \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, x) \qquad \delta(P, x) := \bigcup_{p \in P} \delta(p, x)$$

Fortsetzung.

- $\hat{\delta}(q,x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p,x)$ folgt mittels (struktureller) Induktion nach x
- wir schreiben

$$\hat{\delta}(P,x) := \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p,x) \qquad \delta(P,x) := \bigcup_{p \in P} \delta(p,x)$$

- für den Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(p,xa) &= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(\hat{\delta}(p,x),a)) && \text{(Definition } \hat{\delta}) \\
&= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(\widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}),x),a)) && \text{(IH)} \\
&= \delta'(\widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}),x),a) && \text{(Definition } \delta' \text{ und Aufgabe 8.15)} \\
&= \widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}),xa)\,. && \text{(Definition } \widehat{\delta'})
\end{aligned}$$

Fortsetzung.

- $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{p \in \epsilon\text{-Hülle}(\{q\})} \widehat{\delta'}(p, x)$ folgt mittels (struktureller) Induktion nach x
- wir schreiben

$$\hat{\delta}(P, x) := \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, x) \qquad \delta(P, x) := \bigcup_{p \in P} \delta(p, x)$$

- für den Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(p, xa) &= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(\hat{\delta}(p, x), a)) && \text{(Definition } \hat{\delta}\text{)} \\
&= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(\widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}), x), a)) && \text{(IH)} \\
&= \delta'(\widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}), x), a) && \text{(Definition } \delta' \text{ und Aufgabe 8.15)} \\
&= \widehat{\delta'}(\epsilon\text{-Hülle}(\{p\}), xa)\,. && \text{(Definition } \widehat{\delta'}\text{)}
\end{aligned}$$

■

Beispiel (Fortsetzung)

Sei ϵ-NEA N gegeben durch:

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Beispiel (Fortsetzung)

Sei ϵ-NEA N gegeben durch:

	0	1	2	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

wir erhalten

	0	1	2
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*q_2$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem NEA akzeptiert, wenn sie von einem ϵ-NEA akzeptiert wird.

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem NEA akzeptiert, wenn sie von einem ϵ-NEA akzeptiert wird.

Beweis.

1. Wenn: Dieser Teil des Satzes folgt aus dem obigen Satz

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem NEA akzeptiert, wenn sie von einem ϵ-NEA akzeptiert wird.

Beweis.

1. Wenn: Dieser Teil des Satzes folgt aus dem obigen Satz
2. Nur-dann-wenn: Dieser Teil ist einfach, da jeder NEA in einen ϵ-NEA übergeführt werden kann, indem die Zustandsübergangsfunktion δ für das Zeichen ϵ für alle $q \in Q$ wie folgt erweitert wird: $\delta(q, \epsilon) = \varnothing$

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem NEA akzeptiert, wenn sie von einem ϵ-NEA akzeptiert wird.

Beweis.

1. Wenn: Dieser Teil des Satzes folgt aus dem obigen Satz
2. Nur-dann-wenn: Dieser Teil ist einfach, da jeder NEA in einen ϵ-NEA übergeführt werden kann, indem die Zustandsübergangsfunktion δ für das Zeichen ϵ für alle $q \in Q$ wie folgt erweitert wird: $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$

∎

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem NEA akzeptiert, wenn sie von einem ϵ-NEA akzeptiert wird.

Beweis.

1. Wenn: Dieser Teil des Satzes folgt aus dem obigen Satz
2. Nur-dann-wenn: Dieser Teil ist einfach, da jeder NEA in einen ϵ-NEA übergeführt werden kann, indem die Zustandsübergangsfunktion δ für das Zeichen ϵ für alle $q \in Q$ wie folgt erweitert wird: $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$

■

Folgerung

DEAs, NEAs und ϵ-NEAs sind gleichmächtig und charakterisieren genau die regulären Sprachen (also rechtslineare Grammatiken) ■

Reguläre Ausdrücke

Definition

Die formale Sprache der regulären Ausdrücke über Alphabet Σ ist induktiv definiert:

1. Basis
   - $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
   - $\boldsymbol{\epsilon}$ ist ein regulärer Ausdruck
   - Für jedes $a \in \Sigma$ ist $\boldsymbol{a}$ ein regulärer Ausdruck

Reguläre Ausdrücke

Definition

Die formale Sprache der regulären Ausdrücke über Alphabet Σ ist induktiv definiert:

1. Basis
   - $\varnothing$ ist ein regulärer Ausdruck
   - ϵ ist ein regulärer Ausdruck
   - Für jedes $a \in \Sigma$ ist $\boldsymbol{a}$ ein regulärer Ausdruck
2. Schritt
   - Für jeden regulären Ausdruck E ist auch die Iteration (E^*) ein regulärer Ausdruck.
   - Für reguläre Ausdrücke E und F ist auch die Konkatenation (EF) ein regulärer Ausdruck.
   - Für reguläre Ausdrücke E und F ist auch die Alternative $(E + F)$ ein regulärer Ausdruck.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ ein Alphabet, dann sind

$$\varnothing, \quad \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{0}, \quad ((\mathbf{00})\mathbf{1}), \quad (\mathbf{0}(\mathbf{01})), \quad ((\mathbf{01})^{\boldsymbol{*}}), \quad (((\mathbf{01}) + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{0})$$

reguläre Ausdrücke über Σ Mit den üblichen Prioritäten erhalten wir

$$\varnothing, \quad \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{001}, \quad \mathbf{0}(\mathbf{01}), \quad (\mathbf{01})^{\boldsymbol{*}}, \quad (\mathbf{01} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{0}\,.$$

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ ein Alphabet, dann sind

$$\varnothing, \quad \epsilon, \quad \mathbf{0}, \quad ((\mathbf{00})\mathbf{1}), \quad (\mathbf{0}(\mathbf{01})), \quad ((\mathbf{01})^{*}), \quad (((\mathbf{01}) + \epsilon)\mathbf{0})$$

reguläre Ausdrücke über Σ Mit den üblichen Prioritäten erhalten wir

$$\varnothing, \quad \epsilon, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{001}, \quad \mathbf{0}(\mathbf{01}), \quad (\mathbf{01})^{*}, \quad (\mathbf{01} + \epsilon)\mathbf{0}\,.$$

Definition (Erinnerung)

- $L \cup M := \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$.
- $LM := \{xy \mid x \in L, y \in M\}$.
- $L^0 := \{\epsilon\}$, $L^{n+1} := LL^n$.
- $L^* := \bigcup_{n \geqslant 0} L^n$.

Definition

Die Sprache eines regulären Ausdrucks ist induktiv definiert:

1. Basis
   - $L(\boldsymbol{\varnothing}) := \varnothing$.
   - $L(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
   - Für jedes $a \in \Sigma$ ist $L(\boldsymbol{a}) := \{a\}$.
2. Schritt
   - $L(E\boldsymbol{*}) := (L(E))^*$.
   - $L(EF) := L(E)\,L(F)$.
   - $L(E + F) := L(E) \cup L(F)$.

Definition

Die Sprache eines regulären Ausdrucks ist induktiv definiert:

1. Basis
   - $\mathrm{L}(\boldsymbol{\varnothing}) := \varnothing$.
   - $\mathrm{L}(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
   - Für jedes $a \in \Sigma$ ist $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}) := \{a\}$.
2. Schritt
   - $\mathrm{L}(E^{\boldsymbol{*}}) := (\mathrm{L}(E))^*$.
   - $\mathrm{L}(EF) := \mathrm{L}(E)\,\mathrm{L}(F)$.
   - $\mathrm{L}(E + F) := \mathrm{L}(E) \cup \mathrm{L}(F)$.

Definition

Wir nennen reguläre Ausdrücke E und F äquivalent und schreiben $E \equiv F$, wenn $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(F)$

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für den regulären Ausdruck $E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^{\boldsymbol{*}}\mathbf{01}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^{\boldsymbol{*}}$, ist
$\mathrm{L}(E) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^*\}$

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für den regulären Ausdruck $E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^{*}\mathbf{01}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^{*}$, ist
$\mathrm{L}(E) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^*\}$

Satz

Seien D, E, F reguläre Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E + F) = \mathrm{L}(F + E)$, *das Kommutativgesetz der Alternative.*
- $\mathrm{L}((D + E) + F) = \mathrm{L}(D + (E + F))$, *das Assoziativitätsgesetz der Alternative.*
- $\mathrm{L}((DE)F) = \mathrm{L}(D(EF))$, *das Assoziativitätsgesetz der Konkatenation.*

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für den regulären Ausdruck $E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^{*}\mathbf{01}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^{*}$, ist
$\mathrm{L}(E) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^{*}\}$

Satz

Seien D, E, F reguläre Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E + F) = \mathrm{L}(F + E)$, *das Kommutativgesetz der Alternative.*
- $\mathrm{L}((D + E) + F) = \mathrm{L}(D + (E + F))$, *das Assoziativitätsgesetz der Alternative.*
- $\mathrm{L}((DE)F) = \mathrm{L}(D(EF))$, *das Assoziativitätsgesetz der Konkatenation.*

Beweis.

Der erste Punkt folgt direkt aus der Definition und der Kommutativität der Mengenvereinigung, also $\mathrm{L}(E + F) = \mathrm{L}(E) \cup \mathrm{L}(F) = \mathrm{L}(F) \cup \mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(F + E)$

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für den regulären Ausdruck $E = (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$, ist
$L(E) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^*\}$

Satz

Seien D, E, F reguläre Ausdrücke, dann gilt:

- $L(E+F) = L(F+E)$, *das Kommutativgesetz der Alternative.*
- $L((D+E)+F) = L(D+(E+F))$, *das Assoziativitätsgesetz der Alternative.*
- $L((DE)F) = L(D(EF))$, *das Assoziativitätsgesetz der Konkatenation.*

Beweis.

Der erste Punkt folgt direkt aus der Definition und der Kommutativität der Mengenvereinigung, also $L(E+F) = L(E) \cup L(F) = L(F) \cup L(E) = L(F+E)$; die anderen Punkte sind analog ∎

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathsf{L}(\varnothing + E) = \mathsf{L}(E + \varnothing) = \mathsf{L}(E)$, *d.h. $\varnothing$ ist das neutrale Element für die Alternative*
- $\mathsf{L}(\epsilon E) = \mathsf{L}(E\epsilon) = \mathsf{L}(E)$, *d.h. ϵ ist das neutrale Element der Konkatenation*
- $\mathsf{L}(\varnothing E) = \mathsf{L}(E\varnothing) = \emptyset$, *d.h. $\varnothing$ ist ein Annihilator der Konkatenation*

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathsf{L}(\varnothing + E) = \mathsf{L}(E + \varnothing) = \mathsf{L}(E)$, *d.h.* $\varnothing$ *ist das neutrale Element für die Alternative*
- $\mathsf{L}(\epsilon E) = \mathsf{L}(E\epsilon) = \mathsf{L}(E)$, *d.h.* ϵ *ist das neutrale Element der Konkatenation*
- $\mathsf{L}(\varnothing E) = \mathsf{L}(E\varnothing) = \emptyset$, *d.h.* $\varnothing$ *ist ein Annihilator der Konkatenation*

$\blacksquare$

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathrm{L}(\varnothing + E) = \mathrm{L}(E + \varnothing) = \mathrm{L}(E)$, *d.h.* $\varnothing$ *ist das neutrale Element für die Alternative*
- $\mathrm{L}(\epsilon E) = \mathrm{L}(E\epsilon) = \mathrm{L}(E)$, *d.h.* ϵ *ist das neutrale Element der Konkatenation*
- $\mathrm{L}(\varnothing E) = \mathrm{L}(E\varnothing) = \emptyset$, *d.h.* $\varnothing$ *ist ein Annihilator der Konkatenation*

■

Satz

Seien D, E, F reguläre Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathrm{L}(D(E + F)) = \mathrm{L}(DE + DF)$, *linkes Distributivgesetz der Konkatenation bezüglich der Alternative*
- $\mathrm{L}((E + F)D) = \mathrm{L}(ED + FD)$, *rechtes Distributivgesetz der Konkatenation bezüglich der Alternative*

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathrm{L}(\varnothing + E) = \mathrm{L}(E + \varnothing) = \mathrm{L}(E)$, *d.h. $\varnothing$ ist das neutrale Element für die Alternative*
- $\mathrm{L}(\epsilon E) = \mathrm{L}(E\epsilon) = \mathrm{L}(E)$, *d.h. ϵ ist das neutrale Element der Konkatenation*
- $\mathrm{L}(\varnothing E) = \mathrm{L}(E\varnothing) = \varnothing$, *d.h. $\varnothing$ ist ein Annihilator der Konkatenation*

■

Satz

Seien D, E, F reguläre Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathrm{L}(D(E + F)) = \mathrm{L}(DE + DF)$, *linkes Distributivgesetz der Konkatenation bezüglich der Alternative*
- $\mathrm{L}((E + F)D) = \mathrm{L}(ED + FD)$, *rechtes Distributivgesetz der Konkatenation bezüglich der Alternative*

■

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E + E) = \mathrm{L}(E)$, *Idempotenzgesetz*

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E+E) = \mathrm{L}(E)$, *Idempotenzgesetz*

$\blacksquare$

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E + E) = \mathrm{L}(E)$, *Idempotenzgesetz*

■

Satz

Seien E und F regulärere Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathrm{L}(E^*) = \mathrm{L}(E^* E^*) = \mathrm{L}(E^* + E^*) = \mathrm{L}((E^*)^*)$.

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathsf{L}(E + E) = \mathsf{L}(E)$, *Idempotenzgesetz*

$\blacksquare$

Satz

Seien E und F regulärere Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathsf{L}(E^*) = \mathsf{L}(E^* E^*) = \mathsf{L}(E^* + E^*) = \mathsf{L}((E^*)^*)$.
- $\mathsf{L}(\emptyset^*) = \mathsf{L}(\epsilon^*) = \{\epsilon\}$.

Satz

Sei E ein regulärer Ausdruck, dann gilt:

- $\mathsf{L}(E+E) = \mathsf{L}(E)$, *Idempotenzgesetz*

■

Satz

Seien E und F regulärere Ausdrücke, dann gilt:

- $\mathsf{L}(E^*) = \mathsf{L}(E^*E^*) = \mathsf{L}(E^* + E^*) = \mathsf{L}((E^*)^*)$.
- $\mathsf{L}(\varnothing^*) = \mathsf{L}(\epsilon^*) = \{\epsilon\}$.
- $\mathsf{L}((E+F)^*) = \mathsf{L}((E^*+F^*)^*) = \mathsf{L}((E^*F^*)^*) = \mathsf{L}((E^*F)^*E^*) = \mathsf{L}(E^*(FE^*)^*)$.

Beweis.

Tafel ■

Satz

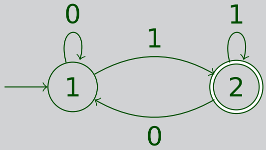
Sei N ein ϵ-NEA; dann existiert ein regulärer Ausdruck R mit $\mathsf{L}(N) = \mathsf{L}(R)$

Satz

Sei N ein ϵ-NEA; dann existiert ein regulärer Ausdruck R mit $\mathrm{L}(N) = \mathrm{L}(R)$

Beispiel

Für den DEA A gegeben durch den Zustandsgraphen



liefert der Beweis des Satzes den regulären Ausdruck

$$\mathbf{0^*1(0^*1)^*}$$

Beweisidee (vergleiche Floyd-Warshall)

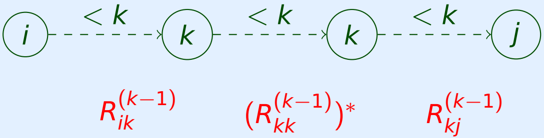
- OBdA. hat N die Zustände $\{1, \ldots, n\}$

Beweisidee (vergleiche Floyd-Warshall)

- OBdA. hat N die Zustände $\{1, \ldots, n\}$
- wir definieren reguläre Ausdrücke $R_{ij}^{(k)}$ induktiv
- $R_{ij}^{(k)}$ beschreibt die Wörter, die auf dem Weg p von Knoten i nach j gelesen werden können, wenn alle Zwischenknoten in $p \leqslant k$

Beweisidee (vergleiche Floyd-Warshall)

- OBdA. hat N die Zustände $\{1, \ldots, n\}$
- wir definieren reguläre Ausdrücke $R_{ij}^{(k)}$ induktiv
- $R_{ij}^{(k)}$ beschreibt die Wörter, die auf dem Weg p von Knoten i nach j gelesen werden können, wenn alle Zwischenknoten in $p \leqslant k$
- Konstruktion graphisch



Beweisidee (vergleiche Floyd-Warshall)

- OBdA. hat N die Zustände $\{1, \ldots, n\}$
- wir definieren reguläre Ausdrücke $R_{ij}^{(k)}$ induktiv
- $R_{ij}^{(k)}$ beschreibt die Wörter, die auf dem Weg p von Knoten i nach j gelesen werden können, wenn alle Zwischenknoten in $p \leqslant k$
- Konstruktion graphisch

$$i \xrightarrow{< k} k \xrightarrow{< k} k \xrightarrow{< k} j$$

$$R_{ik}^{(k-1)} \qquad (R_{kk}^{(k-1)})^* \qquad R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{k} := R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

  $i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \emptyset$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

$i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \emptyset$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

$i = j$ wie oben, nur wird das Leerwort noch angefügt, zB im 2ten Teilfall $R_{ij}^{(0)} := \epsilon + \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

  $i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \varnothing$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

  $i = j$ wie oben, nur wird das Leerwort noch angefügt, zB im 2ten Teilfall $R_{ij}^{(0)} := \epsilon + \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

- $k > 0$, dann unterscheide
  - Zustand k liegt nicht auf dem Weg, dann $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

  $i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \varnothing$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

  $i = j$ wie oben, nur wird das Leerwort noch angefügt, zB im 2ten Teilfall $R_{ij}^{(0)} := \epsilon + \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

- $k > 0$, dann unterscheide
  - Zustand k liegt nicht auf dem Weg, dann $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$
  - Zustand k liegt auf dem Weg, dann $R_{ij}^{k} = R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

  $i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \varnothing$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

  $i = j$ wie oben, nur wird das Leerwort noch angefügt, zB im 2ten Teilfall $R_{ij}^{(0)} := \epsilon + \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

- $k > 0$, dann unterscheide
  - Zustand k liegt nicht auf dem Weg, dann $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$
  - Zustand k liegt auf dem Weg, dann $R_{ij}^{k} = R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

  in Summe: $R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

Beweis.

- $k = 0$, dann unterscheiden wir die Teilfälle $i \neq j$ und $i = j$:

$i \neq j$ wenn es keine Kante von i nach j gibt $R_{ij}^{(0)} := \emptyset$, sonst $R_{ij}^{(0)} := \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

$i = j$ wie oben, nur wird das Leerwort noch angefügt, zB im 2ten Teilfall $R_{ij}^{(0)} := \epsilon + \boldsymbol{a_1} + \cdots + \boldsymbol{a_\ell}$

- $k > 0$, dann unterscheide
  - Zustand k liegt nicht auf dem Weg, dann $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$
  - Zustand k liegt auf dem Weg, dann $R_{ij}^{k} = R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

  in Summe: $R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^{\boldsymbol{*}} R_{kj}^{(k-1)}$

wir definieren:

$$R := R_{s_1 f_1}^{(n)} + \cdots + R_{s_1 f_l}^{(n)} + R_{s_2 f_1}^{(n)} + \cdots + R_{s_2 f_l}^{(n)} + \cdots + R_{s_m f_1}^{(n)} + \cdots + R_{s_m f_l}^{(n)}$$

wobei $s_1, \ldots, s_m$ alle Startzustände und $f_1, \ldots, f_l$ alle akzeptierenden Zustände in N bezeichnen. ∎

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)} \, ,$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)},$$

Mithilfe der Rekursionsformel

$$R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^{*}R_{kj}^{(k-1)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)} ,$$

Mithilfe der Rekursionsformel

$$R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

berechnen wir:

$$R_{12}^{(2)} = R_{12}^{(1)} + R_{12}^{(1)} (R_{22}^{(1)})^* R_{22}^{(1)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)} \, ,$$

Mithilfe der Rekursionsformel

$$R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

berechnen wir:

$$R_{12}^{(2)} = R_{12}^{(1)} + R_{12}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{22}^{(1)}$$

$$R_{12}^{(1)} = R_{12}^{(0)} + R_{11}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \equiv \mathbf{1} + (\mathbf{0} + \epsilon)(\mathbf{0} + \epsilon)^* \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}^* \mathbf{1}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)} \,,$$

Mithilfe der Rekursionsformel

$$R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

berechnen wir:

$$R_{12}^{(2)} = R_{12}^{(1)} + R_{12}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{22}^{(1)}$$

$$R_{12}^{(1)} = R_{12}^{(0)} + R_{11}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \equiv \mathbf{1} + (\mathbf{0} + \epsilon)(\mathbf{0} + \epsilon)^* \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}^* \mathbf{1}$$

$$R_{22}^{(1)} = R_{22}^{(0)} + R_{21}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \equiv (\epsilon + \mathbf{1}) + \mathbf{0}(\mathbf{0} + \epsilon)^* \mathbf{1} \equiv \epsilon + \mathbf{0}^* \mathbf{1}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist

$$R = R_{12}^{(2)} \, ,$$

Mithilfe der Rekursionsformel

$$R_{ij}^{(k)} := R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

berechnen wir:

$$\begin{aligned} R_{12}^{(2)} &= R_{12}^{(1)} + R_{12}^{(1)} (R_{22}^{(1)})^* R_{22}^{(1)} \equiv \mathbf{0}^*\mathbf{1} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\epsilon + \mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\epsilon + \mathbf{0}^*\mathbf{1}) \\ &\equiv \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\mathbf{0}^*\mathbf{1})^* \end{aligned}$$

$$R_{12}^{(1)} = R_{12}^{(0)} + R_{11}^{(0)} (R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \equiv \mathbf{1} + (\mathbf{0} + \epsilon)(\mathbf{0} + \epsilon)^*\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}^*\mathbf{1}$$

$$R_{22}^{(1)} = R_{22}^{(0)} + R_{21}^{(0)} (R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \equiv (\epsilon + \mathbf{1}) + \mathbf{0}(\mathbf{0} + \epsilon)^*\mathbf{1} \equiv \epsilon + \mathbf{0}^*\mathbf{1}$$

Satz

Sei R ein regulärer Ausdruck. Dann existiert ein ϵ-NEA N, sodass $\mathrm{L}(R) = \mathrm{L}(N)$

Beweis.

Wir verwenden strukturelle Induktion über reguläre Ausdrücke, siehe Skriptum, Satz 8.58.

Satz

Sei R ein regulärer Ausdruck. Dann existiert ein ϵ-NEA N, sodass $\mathrm{L}(R) = \mathrm{L}(N)$

Beweis.

Wir verwenden strukturelle Induktion über reguläre Ausdrücke, siehe Skriptum, Satz 8.58. $\blacksquare$

Satz

Sei R ein regulärer Ausdruck. Dann existiert ein ϵ-NEA N, sodass $\mathrm{L}(R) = \mathrm{L}(N)$

Beweis.

Wir verwenden strukturelle Induktion über reguläre Ausdrücke, siehe Skriptum, Satz 8.58. ∎

Beispiel

Für den regulären Ausdruck

$$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^{*}\mathbf{1}(\mathbf{0} + \mathbf{1}),$$

liefert der Satz einen ϵ-NEA mit 16 Zuständen. NB: Der erhaltene Automat ist nicht notwendigerweise minimal.