Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch
Burak Ekici
Johannes Koch
Georg Moser
David Obwaller
Vincent van Oostrom
Oleksandra Panasiuk

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung der letzten LVA

Satz

Sei N ein ϵ-NEA; dann existiert ein regulärer Ausdruck R mit $\mathsf{L}(N) = \mathsf{L}(R)$

Satz

Sei R ein regulärer Ausdruck. Dann existiert ein ϵ-NEA N, sodass $\mathsf{L}(R) = \mathsf{L}(N)$

Folgerung

Sei L eine formale Sprache, die folgenden Aussagen sind äquivalent

1. *L ist regulär*
2. $L = \mathsf{L}(G)$, *wobei G eine rechtslineare Grammatik*
3. $L = \mathsf{L}(D)$, *wobei D ein DEA*
4. $L = \mathsf{L}(N)$, *wobei N ein NEA*
5. $L = \mathsf{L}(N')$, *wobei N' ein ϵ-NEA*

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont'd)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschossenheit, Schleifenlemma

Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont’d)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschossenheit, Schleifenlemma

Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Abgeschlossenheit regulärer Sprachen

Satz (Erinnerung)

Seien L, M reguläre Sprachen (über dem Alphabet Σ), dann gilt

1. *Die Vereinigung $L \cup M$ ist regulär*
2. *Das Komplement $\sim L$ ist regulär*
3. *Der Schnitt $L \cap M$ ist regulär*
4. *Die Mengendifferenz $L \setminus M$ ist regulär*

Satz

Sind L und M regulär, dann ist auch die Vereinigung $L \cup M$ regulär

Satz

Sind L und M regulär, dann ist auch die Vereinigung $L \cup M$ regulär

Beweis.

- Weil L und M regulär sind, existieren reguläre Ausdrücke E, F, sodass $L = \mathrm{L}(E)$ und $M = \mathrm{L}(F)$
- Dann ist $E + F$ ein regulärer Ausdruck für die Sprache $\mathrm{L}(E) \cup \mathrm{L}(F) = L \cup M$
- Somit ist $L \cup M$ regulär

Satz

Sind L und M regulär, dann ist auch die Vereinigung $L \cup M$ regulär

Beweis.

- Weil L und M regulär sind, existieren reguläre Ausdrücke E, F, sodass $L = \mathrm{L}(E)$ und $M = \mathrm{L}(F)$
- Dann ist $E + F$ ein regulärer Ausdruck für die Sprache $\mathrm{L}(E) \cup \mathrm{L}(F) = L \cup M$
- Somit ist $L \cup M$ regulär

$\blacksquare$

Satz

Wenn L (über dem Alphabet Σ) regulär ist, dann ist auch das Komplement $\sim L = \Sigma^* \setminus L$ regulär

Satz

Wenn L (über dem Alphabet Σ) regulär ist, dann ist auch das Komplement $\sim L = \Sigma^* \setminus L$ regulär

Beweis.

- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$
- Konstruiere $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$, dann gilt $\sim L = \mathrm{L}(B)$

Satz

Wenn L (über dem Alphabet Σ) regulär ist, dann ist auch das Komplement $\sim L = \Sigma^* \setminus L$ regulär

Beweis.

- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$
- Konstruiere $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$, dann gilt $\sim L = \mathrm{L}(B)$

$\blacksquare$

Satz

Wenn L (über dem Alphabet Σ) regulär ist, dann ist auch das Komplement $\sim L = \Sigma^* \setminus L$ *regulär*

Beweis.

- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$
- Konstruiere $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$, dann gilt $\sim L = \mathrm{L}(B)$

$\blacksquare$

Satz

Wenn L und M regulär sind, dann ist auch der Schnitt $L \cap M$ *regulär*

Beweis.

Wir verwenden De Morgan $L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$

Satz

Wenn L (über dem Alphabet Σ) regulär ist, dann ist auch das Komplement $\sim L = \Sigma^* \setminus L$ regulär

Beweis.

- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$
- Konstruiere $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$, dann gilt $\sim L = \mathrm{L}(B)$

$\blacksquare$

Satz

Wenn L und M regulär sind, dann ist auch der Schnitt $L \cap M$ regulär

Beweis.

Wir verwenden De Morgan $L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$ $\blacksquare$

Satz

Wenn L und M regulär sind, dann ist auch $L \setminus M$ regulär

Beweis.

Wir verwenden De Morgan $L \setminus M = L \cap (\sim M)$ ∎

Satz

Wenn L und M regulär sind, dann ist auch $L \setminus M$ regulär

Beweis.

Wir verwenden De Morgan $L \setminus M = L \cap (\sim M)$ ∎

Beispiel (1)

Sei $R = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$ und $L = \mathrm{L}(R)$; wir suchen den RA R' sodass $\sim L = \mathrm{L}(R')$.

Satz

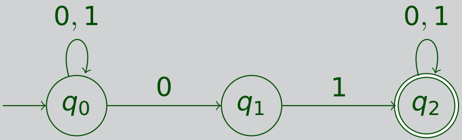
Wenn L und M regulär sind, dann ist auch $L \setminus M$ regulär

Beweis.

Wir verwenden De Morgan $L \setminus M = L \cap (\sim M)$ ∎

Beispiel (1)

Sei $R = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^{\boldsymbol{*}}\mathbf{01}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^{\boldsymbol{*}}$ und $L = \mathrm{L}(R)$; wir suchen den RA R' sodass $\sim L = \mathrm{L}(R')$.
Zunächst betrachte den folgenden NEA N mit $\mathrm{L}(N) = L$



Beispiel (2)

Teilmengenkonstruktion für N; schreiben N in Tabellenform

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Beispiel (2)

Teilmengenkonstruktion für N; schreiben N in Tabellenform

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Wir erhalten D mit $\mathrm{L}(D) = L$

	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Beispiel (3)

Minimierung liefert die Äquivalenz der Zustände $\{q_0, q_2\}$ und $\{q_0, q_1, q_2\}$

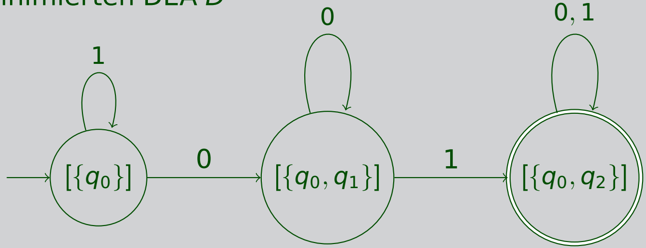
$\{q_0\}$			
$\checkmark$	$\{q_0, q_1\}$		
$\checkmark$	$\checkmark$	$\{q_0, q_2\}$	
$\checkmark$	$\checkmark$		$\{q_0, q_1, q_2\}$

Beispiel (3)

Minimierung liefert die Äquivalenz der Zustände $\{q_0, q_2\}$ und $\{q_0, q_1, q_2\}$

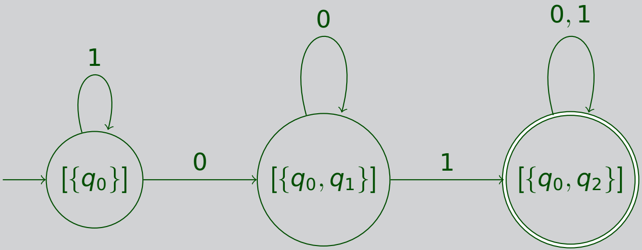
$\{q_0\}$			
✓	$\{q_0, q_1\}$		
✓	✓	$\{q_0, q_2\}$	
✓	✓		$\{q_0, q_1, q_2\}$

Wir erhalten den minimierten DEA D'



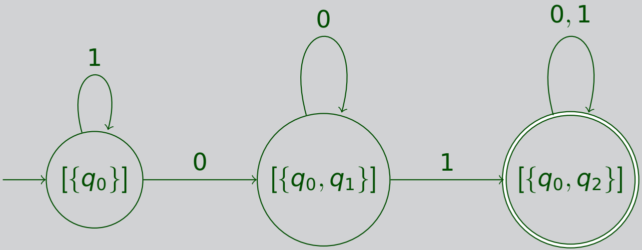
Beispiel (4)

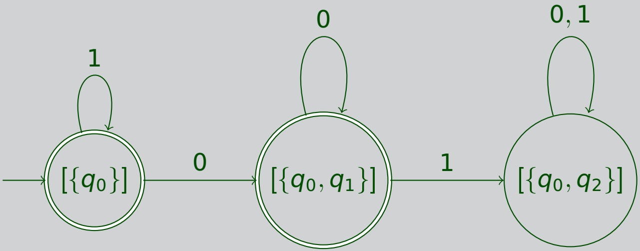
Wir komplementieren DEA D' und erhalten DEA D''



Beispiel (4)

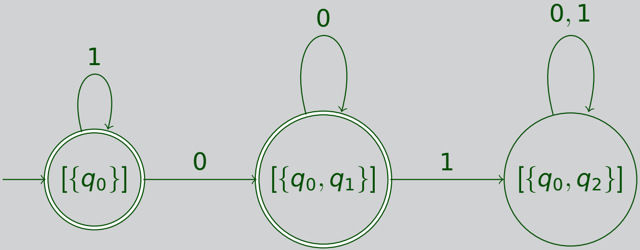
Wir komplementieren DEA D' und erhalten DEA D''





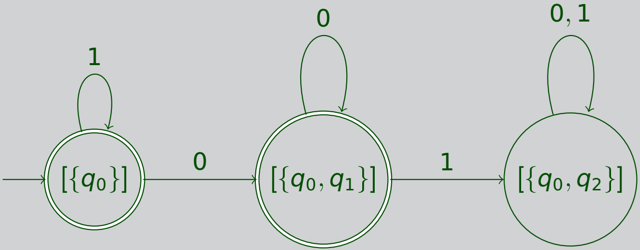
Beispiel (5)

Sei D'' der komplementierte DEA



Beispiel (5)

Sei D'' der komplementierte DEA

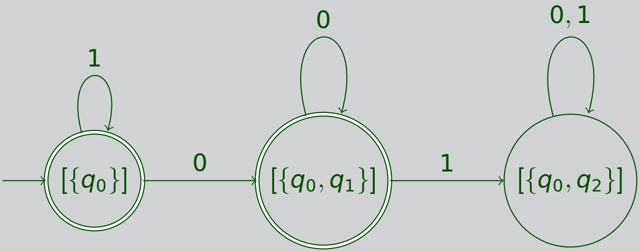


Schließlich können wir für R' den folgenden regulären Ausdruck angeben

1*0*

Beispiel (5)

Sei D'' der komplementierte DEA



Schließlich können wir für R' den folgenden regulären Ausdruck angeben

$$\mathbf{1^*0^*}$$

Es folgt

$$\sim \mathrm{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*) = \mathrm{L}(\mathbf{1^*0^*})$$

Die Grenzen endlicher Automaten

Beispiel

Wir betrachten die Sprache

$$B = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\} = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$$

Dann ist B nicht regulär

Die Grenzen endlicher Automaten

Beispiel

Wir betrachten die Sprache

$$B = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \mid n \geqslant 0\} = \{\epsilon, \mathrm{ab}, \mathrm{aabb}, \mathrm{aaabbb}, \dots\}$$

Dann ist B nicht regulär

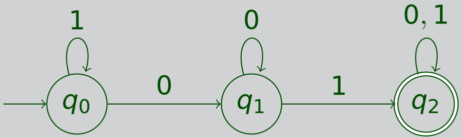
Beispiel

Wir betrachten die Sprache

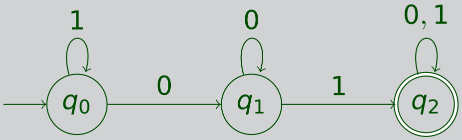
$$C = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\} = \{0, 00, 0000, 00000000, \dots\}$$

Dann ist C nicht regulär

Beispiel



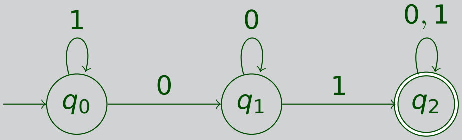
Beispiel



Frage

Wie wird der String $w = 0000110$ akzeptiert?

Beispiel



Frage

Wie wird der String $w = 0000110$ akzeptiert?

Antwort

Da $\ell(w) = 7 > 3 = |Q|$ muss eine Schleife im Automaten ausgenutzt werden

Satz (Schleifenlemma)

Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ Wörter $x, y, z \in \Sigma^*$ existieren mit $w = xyz$ und

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leqslant n$,
- *für alle* $k \geqslant 0$ *gilt:* $x(y)^k z \in L$.

Satz (Schleifenlemma)

Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ Wörter $x, y, z \in \Sigma^*$ existieren mit $w = xyz$ und

- *$y \neq \epsilon$,*
- *$\ell(xy) \leqslant n$,*
- *für alle $k \geqslant 0$ gilt: $x(y)^k z \in L$.*

Beweis.

- Angenommen L ist regulär; dann existiert ein DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass $L = \mathrm{L}(A)$

Satz (Schleifenlemma)

Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ Wörter $x, y, z \in \Sigma^*$ existieren mit $w = xyz$ und

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leqslant n$,
- *für alle* $k \geqslant 0$ *gilt:* $x(y)^k z \in L$.

Beweis.

- Angenommen L ist regulär; dann existiert ein DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass $L = \mathrm{L}(A)$
- Sei $\#(Q) = n$ und

$$w = w_1 \cdots w_m \in L$$

mit $w_1, \ldots, w_m \in \Sigma$ und $m \geqslant n$

Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$

Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$
- Nach dem Schubfachprinzip muss es $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$ geben: w hat $\geqslant n + 1$ Präfixe, A aber nur n Zustände

Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$
- Nach dem Schubfachprinzip muss es $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$ geben: w hat $\geqslant n + 1$ Präfixe, A aber nur n Zustände
- Wir zerlegen w

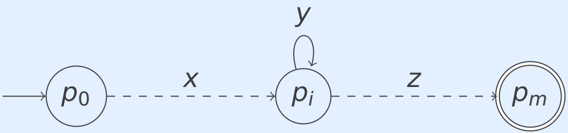
$$\underbrace{w_1 \cdots w_i}_{x} \quad \underbrace{w_{i+1} \cdots w_j}_{y \neq \epsilon} \quad \underbrace{w_{j+1} \cdots w_m}_{z}$$

Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$
- Nach dem Schubfachprinzip muss es $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$ geben: w hat $\geqslant n + 1$ Präfixe, A aber nur n Zustände
- Wir zerlegen w

$$\underbrace{w_1 \cdots w_i}_{x} \quad \underbrace{w_{i+1} \cdots w_j}_{y \neq \epsilon} \quad \underbrace{w_{j+1} \cdots w_m}_{z}$$

- Die Situation stellt sich graphisch wie folgt dar:

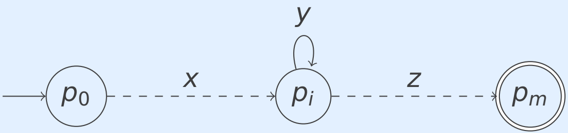


Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$
- Nach dem Schubfachprinzip muss es $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$ geben: w hat $\geqslant n + 1$ Präfixe, A aber nur n Zustände
- Wir zerlegen w

$$\underbrace{w_1 \cdots w_i}_{x} \quad \underbrace{w_{i+1} \cdots w_j}_{y \neq \epsilon} \quad \underbrace{w_{j+1} \cdots w_m}_{z}$$

- Die Situation stellt sich graphisch wie folgt dar:



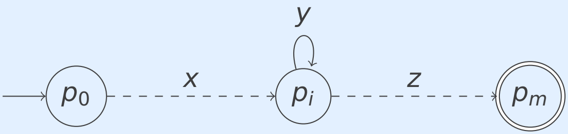
- Um das Wort $x(y)^k z$ zu akzeptieren, läuft der Automat k-mal durch den Weg, der p_i mit p_j verbindet

Beweis. (Fortsetzung).

- Definiere $p_l := \hat{\delta}(s, w_1 \cdots w_l)$;
  beachte für $l = 0$ ist $w_1 \cdots w_l = \epsilon$ und somit $p_0 = s$
- Nach dem Schubfachprinzip muss es $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$ geben: w hat $\geqslant n + 1$ Präfixe, A aber nur n Zustände
- Wir zerlegen w

$$\underbrace{w_1 \cdots w_i}_{x} \qquad \underbrace{w_{i+1} \cdots w_j}_{y \neq \epsilon} \qquad \underbrace{w_{j+1} \cdots w_m}_{z}$$

- Die Situation stellt sich graphisch wie folgt dar:



- Um das Wort $x(y)^k z$ zu akzeptieren, läuft der Automat k-mal durch den Weg, der p_i mit p_j verbindet $\blacksquare$

Anwendung des Schleifenlemmas

Satz (Anwendung (1))

Sei L eine formale Sprache über Σ, sodass:

- *für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass*
- *für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$*

Dann ist L nicht regulär. ■

Anwendung des Schleifenlemmas

Satz (Anwendung (1))

Sei L eine formale Sprache über Σ, sodass:

- *für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass*
- *für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$*

Dann ist L nicht regulär. ■

Beispiel (1)

Sei $\Sigma = \{1\}$; dann ist

$$D = \{w \in \Sigma^* \mid \ell(w) \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär

Beispiel (2)

Wir zeigen, dass für D gilt:

- für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass
- für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$

Beispiel (2)

Wir zeigen, dass für D gilt:

- für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass
- für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$

Wir wählen $w = 1^p$, wobei p eine Primzahl größer oder gleich $n + 2$ ist; somit ist $w \in L$ und $\ell(w) = p \geqslant n + 2 \geqslant n$.

Beispiel (2)

Wir zeigen, dass für D gilt:

- für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass
- für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$

Wir wählen $w = 1^p$, wobei p eine Primzahl größer oder gleich $n + 2$ ist; somit ist $w \in L$ und $\ell(w) = p \geqslant n + 2 \geqslant n$.

Seien nun x, y und z beliebig, sodass $w = xyz$, $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$.

Beispiel (2)

Wir zeigen, dass für D gilt:

- für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass
- für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$

Wir wählen $w = 1^p$, wobei p eine Primzahl größer oder gleich $n + 2$ ist; somit ist $w \in L$ und $\ell(w) = p \geqslant n + 2 \geqslant n$.

Seien nun x, y und z beliebig, sodass $w = xyz$, $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$.

Setze $m := \ell(y)$; Wir wählen $k := \ell(xz) = p - m$, Betrachte

$$v := x(y)^{(p-m)}z$$

Beispiel (2)

Wir zeigen, dass für D gilt:

- für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wort $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$, sodass
- für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x(y)^k z \notin L$

Wir wählen $w = 1^p$, wobei p eine Primzahl größer oder gleich $n+2$ ist; somit ist $w \in L$ und $\ell(w) = p \geqslant n + 2 \geqslant n$.

Seien nun x, y und z beliebig, sodass $w = xyz$, $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$.

Setze $m := \ell(y)$; Wir wählen $k := \ell(xz) = p - m$, Betrachte

$$v := x(y)^{(p-m)}z$$

Aber $v \notin L$, weil

$$\ell(v) = \ell(x(y)^{(p-m)}z) = (p-m) + m \cdot (p-m) = (p-m) \cdot (m+1)\,.$$

Das heißt $\ell(v)$ ist keine Primzahl, wenn $(p-m) > 1$ und $(m+1) > 1$

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht
2. Wir wählen das Wort $w := 0^n 1^n \in E$

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht
2. Wir wählen das Wort $w := 0^n 1^n \in E$
3. Betrachte alle Zerlegungen von w in x, y und z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht
2. Wir wählen das Wort $w := 0^n 1^n \in E$
3. Betrachte alle Zerlegungen von w in x, y und z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Es muss gelten $x = 0^i$, $y = 0^j$, $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht
2. Wir wählen das Wort $w := 0^n 1^n \in E$
3. Betrachte alle Zerlegungen von w in x, y und z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Es muss gelten $x = 0^i$, $y = 0^j$, $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$
5. Nunn wählen wir $k = 0$

Beispiel

Die Sprache

$$E = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0en wie 1en}\}$$

ist nicht regulär:

1. Die Anwendung des Schleifenlemmas wird einfach, wenn wir ein “pumpbares” Teilwort finden, welches ausschließlich aus 0en besteht
2. Wir wählen das Wort $w := 0^n 1^n \in E$
3. Betrachte alle Zerlegungen von w in x, y und z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Es muss gelten $x = 0^i$, $y = 0^j$, $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$
5. Nunn wählen wir $k = 0$

Dann gilt immer $x(y)^0 z \notin E$, also sind die Voraussetzung des Satzes zum Schleifenlemma erfüllt: L ist nicht regulär

Definition

eine deterministische, einbändige Turingmaschine (TM) M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \; \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma$ ($\sqcup \neq \vdash$), das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und
9. $r \in Q$, der verwerfende Zustand mit $t \neq r$.

Übergangsfunktion

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

1. M ersetzt a durch b auf dem Band
2. der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
3. M wechselt in den Zustand q

Übergangsfunktion

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

1. M ersetzt a durch b auf dem Band
2. der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
3. M wechselt in den Zustand q

Zusatzbedingungen

- Der linke Endmarker darf nicht überschrieben werden

$$\forall\, p \in Q, \exists\, q \in Q \quad \delta(p, \vdash) = (q, \vdash, \mathrm{R})$$

Übergangsfunktion

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

1. M ersetzt a durch b auf dem Band
2. der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
3. M wechselt in den Zustand q

Zusatzbedingungen

- Der linke Endmarker darf nicht überschrieben werden

$$\forall\, p \in Q, \exists\, q \in Q \quad \delta(p, \vdash) = (q, \vdash, \mathrm{R})$$

- Wenn die TM akzeptiert/verwirft, bleibt die TM in diesem Zustand

$$\forall b \in \Gamma\ \pi_1(\delta(t, b)) = t \text{ and } \pi_1(\delta(r, b)) = r$$

Hier bezeichnet π_1 die Projektion auf die erste Komponente

Beispiel

Sei $M = (\{s, p, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ eine TM, δ kann durch eine Zustandstabelle

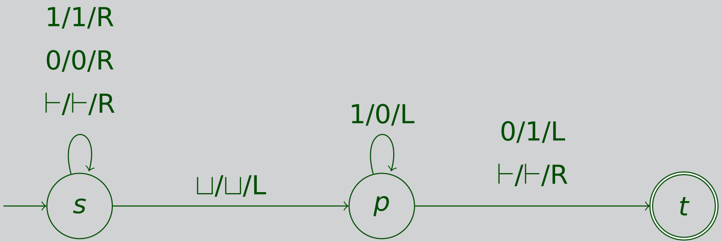
	$\vdash$	0	1	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, \mathrm{R})$	$(s, 0, \mathrm{R})$	$(s, 1, \mathrm{R})$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
p	$(t, \vdash, \mathrm{R})$	$(t, 1, \mathrm{L})$	$(p, 0, \mathrm{L})$	$\cdot$

Beispiel

Sei $M = (\{s, p, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ eine TM, δ kann durch eine Zustandstabelle

	$\vdash$	0	1	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, \mathrm{R})$	$(s, 0, \mathrm{R})$	$(s, 1, \mathrm{R})$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
p	$(t, \vdash, \mathrm{R})$	$(t, 1, \mathrm{L})$	$(p, 0, \mathrm{L})$	$\cdot$

oder durch das Zustandsübergangsgraph angegeben werder



Definition

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

1. $p \in Q$ Zustand,
2. $x = y\sqcup^\infty$ Bandinhalt $\quad y \in \Gamma^*$
3. $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Definition

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

1. $p \in Q$ Zustand,
2. $x = y\sqcup^\infty$ Bandinhalt $y \in \Gamma^*$
3. $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Definition

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$:

$$(s, \vdash x\sqcup^\infty, 0)$$

Definition

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

1. $p \in Q$ Zustand,
2. $x = y\sqcup^\infty$ Bandinhalt $\quad y \in \Gamma^*$
3. $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Definition

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$:

$$(s, \vdash x\sqcup^\infty, 0)$$

Beispiel (Erinnerung)

Für die TM M aus dem vorigen Beispiel gilt

$$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, \vdash 0011\sqcup^\infty, 3)$$

Schrittfunktion von TMs

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $y = y_0 \cdots y_{m-1} \in \Gamma^*$ mit $m > n$; die Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, y\sqcup^\infty, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, y_0 \ldots b \ldots y_{m-1}\sqcup^\infty, n-1) & \delta(p, y_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, y_0 \ldots b \ldots y_{m-1}\sqcup^\infty, n+1) & \delta(p, y_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

Schrittfunktion von TMs

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $y = y_0 \cdots y_{m-1} \in \Gamma^*$ mit $m > n$; die Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, y\sqcup^\infty, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, y_0 \dots b \dots y_{m-1}\sqcup^\infty, n-1) & \delta(p, y_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, y_0 \dots b \dots y_{m-1}\sqcup^\infty, n+1) & \delta(p, y_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

Definition

Wir definieren die reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$ von $\xrightarrow[M]{1}$ indirekt: induktiv:

1. $\alpha \xrightarrow[M]{0} \alpha$ für jede Konfiguration α
2. $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für eine Konfiguration γ und
3. $\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \beta$ für ein $n \geqslant 0$

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$

- hält bei Eingabe x, wenn x akzeptiert oder verworfen
- hält nicht bei Eingabe x, wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist total, wenn M auf allen Eingaben hält

Definition

eine TM M

- **akzeptiert** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

- **verwirft** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$

- **hält** bei Eingabe x, wenn x akzeptiert oder verworfen
- **hält nicht** bei Eingabe x, wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist **total**, wenn M auf **allen** Eingaben hält

Definition

die **Sprache** einer TM M ist wie folgt definiert:

$$L(M) := \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x\}$$

Beispiel

Für die TM $M = (\{s, q_0, q_1, q'_0, q'_1, q, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ gegeben durch die Zustandstabelle

	$\vdash$	0	1	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(q_0, \vdash, R)$	$(q_1, \vdash, R)$	$(t, \sqcup, L)$
q_0	$\cdot$	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q'_0, \sqcup, L)$
q_1	$\cdot$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q'_1, \sqcup, L)$
q'_0	$(r, \vdash, R)$	$(q, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, L)$	$\cdot$
q'_1	$(r, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, L)$	$(q, \sqcup, L)$	$\cdot$
q	$(s, \vdash, R)$	$(q, 0, L)$	$(q, 1, L)$	$\cdot$

ist $\mathrm{L}(M) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ ist ein Palindrom gerader Länge$\}$

Beispiel

Für die TM $M = (\{s, q_0, q_1, q'_0, q'_1, q, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ gegeben durch die Zustandstabelle

	$\vdash$	0	1	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(q_0, \vdash, R)$	$(q_1, \vdash, R)$	$(t, \sqcup, L)$
q_0	$\cdot$	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q'_0, \sqcup, L)$
q_1	$\cdot$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q'_1, \sqcup, L)$
q'_0	$(r, \vdash, R)$	$(q, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, L)$	$\cdot$
q'_1	$(r, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, L)$	$(q, \sqcup, L)$	$\cdot$
q	$(s, \vdash, R)$	$(q, 0, L)$	$(q, 1, L)$	$\cdot$

ist $\mathrm{L}(M) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ ist ein Palindrom gerader Länge$\}$

Beispiel

M ist total und es gilt z.B. $(s, \vdash 0110 \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (q'_0, \vdash 0110 \sqcup^\infty, 4)$