



## Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch    David Obwaller  
 Burak Ekici        Vincent van Oostrom  
 Johannes Koch    Oleksandra Panasiuk  
**Georg Moser**

cbr.uibk.ac.at

## Inhalte der Lehrveranstaltung (cont'd)

### Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschlossenheit, Schleifenlemma

### Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

### Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, **polynomielle Reduktion**, **logspace Reduktion**, die **Klassen NLOGSPACE und PSPACE**

## Zusammenfassung der letzten LVA

### Definition

- 1  $\exists R: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$
- 2  $R$  berechenbar in polynomieller Zeit
- 3 für  $A \subseteq \Sigma^*$ ,  $B \subseteq \Delta^*$  gilt  $x \in A \Leftrightarrow R(x) \in B$

dann ist  $A$  in polynomieller Zeit auf  $B$  **reduzierbar**; kurz:  $A \leq^P B$

### Definition

für eine Sprache  $B$ , sei

- 1  $B \leq^P$ -hart für  $C$  und
- 2  $B \in C$

dann ist  $B \leq^P$ -vollständig für  $C$  oder (kurz)  $C$ -vollständig

### Beispiel

Wir zeigen mittels einer polynomiellen Reduktion nach SAT dass 3-Färbbarkeit von Graphen in NP ist

- 1 jede Ecke muss genau eine Farbe haben

$$A = \bigwedge_{e \in E} X_{1e} \vee X_{2e} \vee X_{3e}$$

$$B = \bigwedge_{e \in E} (X_{1e} \rightarrow (\neg X_{2e} \wedge \neg X_{3e})) \wedge (X_{2e} \rightarrow (\neg X_{1e} \wedge \neg X_{3e})) \wedge (X_{3e} \rightarrow (\neg X_{1e} \wedge \neg X_{2e}))$$

- 2 und die Farben von benachbarten Ecken (also Ecken zwischen denen es eine Kante gibt) müssen unterschiedlich sein

$$C = \bigwedge_{k \in K, x \in r(k), y \in r(k), x \neq y, f \in \{1,2,3\}} X_{fx} \rightarrow \neg X_{fy}$$

## Beispiel

HK ist  $\leq^P$ -vollständig für NP

## Folgerung

- wenn  $\exists$  polynomieller Algorithmus für HK, dann
- $\exists$  polynomieller Algorithmus  $\forall$  Probleme in NP

## Beispiele

- Maze  $\in$  NP, aber Maze ist nicht hart für NP
- definiere GEO als Sprache

$GEO := \{(G, s) \mid \text{gerichteter Graph } G, \text{ Startknoten } s, \exists \text{ Gewinnstrategie für Anna}\}$

GEO ist hart für NP, aber  $GEO \notin$  NP

4

## Komplexitätstheorie, graphisch



"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

5

## Definition

sei  $M$  eine totale Mehrband-DTM

- die **Speicherplatzkomplexität** von  $M$  ist eine Funktion  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  
 $S$  misst die maximale Anzahl von Bandfeldern, die  $M$  auf allen Eingaben liest
- $S(n)$  ist der **Speicherplatz** von  $M$ , wenn  $n$  die Länge der Eingabe
- $M$  heißt  **$S$ -Platz-Turingmaschine**

## Definition

sei  $M$  eine totale Mehrband-NTM

- die **Speicherplatzkomplexität** von  $M$  ist Funktion  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  
 $S$  misst die maximale Anzahl von Bandfeldern, die  $M$  auf allen Eingaben in jedem möglichen Berechnungspfad liest
- $M$  heißt  **$S$ -Platz-Turingmaschine**

6

## Definition (vorläufig)

sei  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine numerische Funktion

$DSPACE(S) := \{L(M) \mid M \text{ ist eine mehrbändige DTM mit Speicherplatz in } O(S)\}$

$NSPACE(S) := \{L(M) \mid M \text{ ist eine mehrbändige NTM mit Speicherplatz in } O(S)\}$

## Definition (vorläufig)

$PSPACE = \bigcup_{k \geq 1} DSPACE(n^k)$

$NSPACE = \bigcup_{k \geq 1} NSPACE(n^k)$

## Beispiel

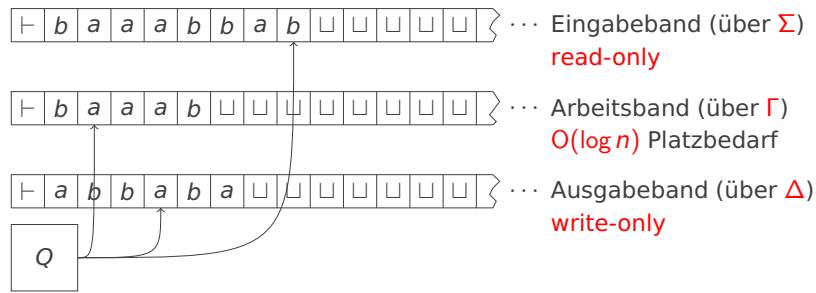
$GEO \in PSPACE$

## Satz

$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NSPACE$

7





**Definition**

- $\exists$  logarithmischer Umwandler  $M$  mit Eingabealphabet  $\Sigma$  und Ausgabealphabet  $\Delta$
- bei Eingabe  $x \in \Sigma^*$ , schreibt  $M$   $R(x)$  auf Ausgabeband

dann heißt  $R: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  **berechenbar mit logarithmischem Platz**

## Reduktion mit logarithmischem Platz

**Definition**

- $\exists R: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$
- $R$  berechenbar mit logarithmischem Platz
- für  $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Delta^*$  gilt  $x \in A \Leftrightarrow R(x) \in B$

dann ist  $A$  auf  $B$  **reduzierbar mit logarithmischem Platz**; kurz  $A \leq^{\log} B$

**Satz**

Seien  $A$  und  $B$  Sprachen; wenn  $A \leq^{\log} B$ , dann gilt auch  $A \leq^P B$  ■

**Definition**

sei  $B$  eine Sprache,  $\mathcal{C}$  eine beliebige Komplexitätsklasse,

- wenn  $\forall$  Sprachen  $A \in \mathcal{C}$  gilt:  $A \leq^{\log} B$   
dann ist  $B \leq^{\log}$ -hart für  $\mathcal{C}$
- wenn  $B \leq^{\log}$ -hart für  $\mathcal{C}$  und  $B \in \mathcal{C}$   
dann ist  $B \leq^{\log}$ -vollständig für  $\mathcal{C}$  oder (kurz)  $\mathcal{C}$ -vollständig

**Beispiele**

- GEO** ist  $\leq^{\log}$ -vollständig für PSPACE
- HK** ist  $\leq^{\log}$ -vollständig für NP
- Maze** ist  $\leq^{\log}$ -vollständig für NLOGSPACE

**Satz**

LOGSPACE  $\subseteq$  NLOGSPACE  $\subseteq$  P  $\subseteq$  NP  $\subseteq$  PSPACE = NPSpace ■

## Klausurvorbereitung

## Fragen aus dem Tutorium

### Organisatorische Fragen

Bei der Klausur, Wie sieht die Punkteverteilung bei der Klausur aus, wenn das richtige Ergebnis ausgerechnet wurde, allerdings nicht mit dem gewünschtem Algorithmus?

### Inhaltliche Fragen

- Was sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Induktionsarten: (i) vollständige, (ii) wohlfundierte, oder (iii) strukturelle?
- Warum ist die Reihenfolge (vom Abarbeiten von Kanten mit gleicher Bewertung) beim Algorithmus von Kruskal irrelevant?
- Warum sind beim Minimierungsalgorithmus nicht immer alle akzeptierenden Zustände gleich?
- Bei der 1. Klausur (Version G) aus dem SS 2018 warum ist bei Aufgabe 10 die Antwortmöglichkeit B falsch?

16

## Weitere Fragen

### Inhaltliche Fragen

- In the Question 12 of version U [of the 1st Exam Summer 2017] it was asked to calculate the shortest paths in a weighted graph using the Algorithm of Floyd-Warshall. The Script (page 39) says that the weights in a graph must be non negative, while in the exam question some of them are negative. Does it mean they can be negative as long as there are no negative cycles in a graph?
- In the Question 15 (same version U) it was asked to convert  $\epsilon$ -NEA to NEA and then to DEA, and according to the solution, we should not consider  $?^*$  before the input 0/1, otherwise there wouldn't be empty sets in NEA in the solution. The question is why shouldn't we consider the epsilon transition before the input.

17

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

18