universität innsbruck

Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch David Obwaller
Burak Ekici Vincent van Oostrom
Johannes Koch Oleksandra Panasiuk
Georg Moser

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition (lexikographische Ordnung)

$\leq$ totale Ordnung auf Σ
Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ sei

$$v <_{\text{lex}} w$$

falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \ell(v)$ und $k \leq \ell(w)$ existiert, sodass

(1) $v_i = w_i \quad$ für $i = 0, \ldots, k-1$ und

(2) $(\ell(v) = k$ und $\ell(w) > k)$ oder $(\ell(v) > k$ und $\ell(w) > k$ und $v_k < w_k)$

Satz

$\leq_{lex}$ ist totale Ordnung auf Σ^*

Definition

$\leq$ totale Ordnung auf Σ

Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ sei

$$v <_{\text{gradlex}} w$$

falls $\ell(v) < \ell(w)$ oder $(\ell(v) = \ell(w)$ und $v <_{\text{lex}} w)$

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $a < b$. Dann ist

$$\epsilon <_{\text{gradlex}} a \quad \epsilon <_{\text{gradlex}} b \quad a <_{\text{gradlex}} b \quad aa <_{\text{gradlex}} ab \quad aaaa >_{\text{gradlex}} ab$$

Satz

$\leq_{gradlex}$ ist eine totale Ordnung auf Σ^*

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Induktives Schließen

Vollständige Induktion

1. Sei m eine fest gewählte natürliche Zahl, z.B. $m = 0$ oder $m = 1$
2. Eine Aussage $A(n)$ soll für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant m$ gezeigt werden
3. In diesem Fall gehen wir wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass A für den Basiswert m gilt.
   - Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle $n \geqslant m$ aus $A(n)$ auch $A(n+1)$ folgt.
4. Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geqslant m$

Induktives Schließen

Vollständige Induktion

1. Sei m eine fest gewählte natürliche Zahl, z.B. $m = 0$ oder $m = 1$
2. Eine Aussage $A(n)$ soll für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant m$ gezeigt werden
3. In diesem Fall gehen wir wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass A für den Basiswert m gilt.
   - Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle $n \geqslant m$ aus $A(n)$ auch $A(n+1)$ folgt.
4. Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geqslant m$

Formal

$$(A(m) \wedge \forall n \geqslant m.(A(n) \rightarrow A(n+1))) \rightarrow (\forall n \geqslant m.A(n))$$

Erweiterte vollständige Induktion

Vollständige Induktion (II)

1. Es gibt mehrere Basiswerte

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l),$$

Erweiterte vollständige Induktion

Vollständige Induktion (II)

1. Es gibt mehrere Basiswerte

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l),$$

2. wir setzen im Beweis des Induktionsschritts $n \geqslant l$ voraus

Erweiterte vollständige Induktion

Vollständige Induktion (II)

1. Es gibt mehrere Basiswerte

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l),$$

2. wir setzen im Beweis des Induktionsschritts $n \geqslant l$ voraus
3. $(A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge \forall n \geqslant l\, (A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge A(n) \rightarrow A(n+1))) \rightarrow (\forall n \geqslant m\, A(n))$

Erweiterte vollständige Induktion

Vollständige Induktion (II)

1. Es gibt mehrere Basiswerte

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l),$$

2. wir setzen im Beweis des Induktionsschritts $n \geqslant l$ voraus
3. $(A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge \forall n \geqslant l\, (A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge A(n) \rightarrow A(n+1))) \rightarrow (\forall n \geqslant m\, A(n))$
4. Um $A(n+1)$ zu beweisen, können als Hypothesen alle Aussagen

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l), A(n)$$

verwendet werden.

Erweiterte vollständige Induktion

Vollständige Induktion (II)

1. Es gibt mehrere Basiswerte

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l),$$

2. wir setzen im Beweis des Induktionsschritts $n \geqslant l$ voraus
3. $(A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge \forall n \geqslant l\ (A(m) \wedge \cdots \wedge A(l) \wedge A(n) \rightarrow A(n+1))) \rightarrow (\forall n \geqslant m\ A(n))$
4. Um $A(n+1)$ zu beweisen, können als Hypothesen alle Aussagen

$$A(m), A(m+1), \ldots, A(l), A(n)$$

verwendet werden.

Die Erweiterung folgt aus der Urform und ist somit gleichmächtig

Wohlfundierte Ordnung

Definition (wohlfundierte Ordnung)

- Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M
- Eine Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ von Elementen in M heißt eine unendliche absteigende Kette, falls

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

- Man nennt $\leq$ wohlfundiert, wenn es in M keine unendliche absteigende Kette gibt

Wohlfundierte Ordnung

Definition (wohlfundierte Ordnung)

- Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M
- Eine Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ von Elementen in M heißt eine unendliche absteigende Kette, falls

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

- Man nennt $\leq$ wohlfundiert, wenn es in M keine unendliche absteigende Kette gibt

Beispiel

- Die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist wohlfundiert
- Die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ ist nicht wohlfundiert
- Für Alphabete mit mindestens zwei Buchstaben ist die lexikographische Ordnung nicht wohlfundiert

Grundlagen der wohlfundierten Induktion

Beispiel

Sei $f : M \to \mathbb{N}$ eine beliebige Abbildung. Dann wird durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) <_{\mathbb{N}} f(y)$$

eine wohlfundierte Ordnung auf M definiert

Grundlagen der wohlfundierten Induktion

Beispiel

Sei $f\colon M \to \mathbb{N}$ eine beliebige Abbildung. Dann wird durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) <_{\mathbb{N}} f(y)$$

eine wohlfundierte Ordnung auf M definiert

Satz

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M. Dann ist $\leq$ wohlfundiert genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein minimales Element besitzt.

Beweis.

Sei $\leq$ wohlfundiert und sei N eine nichtleere Teilmenge von M. Dann gibt es ein Element x_0 in N. Wenn x_0 minimal in N ist, ist man fertig.

Beweis.

Sei $\leq$ wohlfundiert und sei N eine nichtleere Teilmenge von M. Dann gibt es ein Element x_0 in N. Wenn x_0 minimal in N ist, ist man fertig.
Andernfalls gibt es ein Element $x_1 \in N$ mit $x_1 < x_0$. Wenn x_1 nicht minimal ist, dann gibt es ein $x_2 \in N$ mit $x_2 < x_1$, usw. Wegen

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

erreicht man nach endlich vielen Schritten ein minimales Element x_n.

Beweis.

Sei $\leq$ wohlfundiert und sei N eine nichtleere Teilmenge von M. Dann gibt es ein Element x_0 in N. Wenn x_0 minimal in N ist, ist man fertig.
Andernfalls gibt es ein Element $x_1 \in N$ mit $x_1 < x_0$. Wenn x_1 nicht minimal ist, dann gibt es ein $x_2 \in N$ mit $x_2 < x_1$, usw. Wegen

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

erreicht man nach endlich vielen Schritten ein minimales Element x_n.
Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, nehmen wir an, $\leq$ sei nicht wohlfundiert. Dann gibt es eine unendliche absteigende Kette

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots ,$$

und die nichtleere Teilmenge $N = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ hat kein minimales Element.

Beweis.

Sei $\leq$ wohlfundiert und sei N eine nichtleere Teilmenge von M. Dann gibt es ein Element x_0 in N. Wenn x_0 minimal in N ist, ist man fertig.
Andernfalls gibt es ein Element $x_1 \in N$ mit $x_1 < x_0$. Wenn x_1 nicht minimal ist, dann gibt es ein $x_2 \in N$ mit $x_2 < x_1$, usw. Wegen

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$$

erreicht man nach endlich vielen Schritten ein minimales Element x_n.
Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, nehmen wir an, $\leq$ sei nicht wohlfundiert. Dann gibt es eine unendliche absteigende Kette

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots ,$$

und die nichtleere Teilmenge $N = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ hat kein minimales Element. ∎

Satz

Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M, und sei W eine Teilmenge von M mit folgenden zwei Eigenschaften:

- *W enthält alle minimalen Elemente von M.*
- *Wenn für ein nicht-minimales Element x in M alle Vorgänger in W liegen, dann liegt auch x in W.*

Dann ist $W = M$.

Satz

Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M, und sei W eine Teilmenge von M mit folgenden zwei Eigenschaften:

- *W enthält alle minimalen Elemente von M.*
- *Wenn für ein nicht-minimales Element x in M alle Vorgänger in W liegen, dann liegt auch x in W.*

Dann ist $W = M$.

Beweis.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $W \subsetneq M$ ist. Dann ist die Menge

$$N := \{x \in M \mid x \notin W\} = M \setminus W$$

nichtleer und hat nach vorigen Satz ein minimales Element y. Nach der ersten Eigenschaft von W ist y kein minimales Element von M. Da alle Vorgänger von y in W liegen, folgt nach der zweiten Eigenschaft von W der Widerspruch $y \in W$.

Satz

Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M, und sei W eine Teilmenge von M mit folgenden zwei Eigenschaften:

- *W enthält alle minimalen Elemente von M.*
- *Wenn für ein nicht-minimales Element x in M alle Vorgänger in W liegen, dann liegt auch x in W.*

Dann ist $W = M$.

Beweis.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $W \subsetneq M$ ist. Dann ist die Menge

$$N := \{x \in M \mid x \notin W\} = M \setminus W$$

nichtleer und hat nach vorigen Satz ein minimales Element y. Nach der ersten Eigenschaft von W ist y kein minimales Element von M. Da alle Vorgänger von y in W liegen, folgt nach der zweiten Eigenschaft von W der Widerspruch $y \in W$. ∎

Wohlfundierte Induktion

1. Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M
2. Eine Aussage $A(x)$ soll für alle Elemente x in M gezeigt werden
3. Wir gehen wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(m)$ wahr ist für alle minimalen Elemente m von M.
   - Induktionsschritt: Sei x ein nicht-minimales Element von M, und sei $A(y)$ wahr für alle Vorgänger y von x. Wir zeigen, dass auch $A(x)$ wahr ist
4. Dann ist $A(x)$ für alle $x \in M$ wahr

Wohlfundierte Induktion

1. Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M
2. Eine Aussage $A(x)$ soll für alle Elemente x in M gezeigt werden
3. Wir gehen wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(m)$ wahr ist für alle minimalen Elemente m von M.
   - Induktionsschritt: Sei x ein nicht-minimales Element von M, und sei $A(y)$ wahr für alle Vorgänger y von x. Wir zeigen, dass auch $A(x)$ wahr ist
4. Dann ist $A(x)$ für alle $x \in M$ wahr

Beispiel

Sei P die formale Sprache der Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$. Wir zeigen

> *„Wenn $x \in P$ und $\ell(x)$ gerade, dann hat x eine gerade Anzahl von as.“*

Satz

Sei $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung versehen. Dann ist die lexikographische Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}^k$ wohlfundiert.

Satz

Sei $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung versehen. Dann ist die lexikographische Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}^k$ wohlfundiert.

Beweis.

an der Tafel $\blacksquare$

Satz

Sei $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung versehen. Dann ist die lexikographische Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}^k$ wohlfundiert.

Beweis.

an der Tafel ∎

Beispiel

Die folgende Definition (der Ackermannfunktion) ist wohldefiniert:

$$f(n,m) := \begin{cases} m+1 & \text{falls } n=0 \\ f(n-1,1) & \text{falls } n>0 \text{ und } m=0 \\ f(n-1,f(n,m-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

NB: Die Ackermannfunktion wächst sehr flott

Definition (induktiv)

Eine Menge M kann induktiv definiert werden durch:

- Induktionsbasis: Man gibt ein oder mehr Elemente von M an.
- Induktionsschritt: Man spezifiziert, wie man neue Elemente von M aus den vorliegenden Elementen von M bekommt.

Die Menge M besteht dann aus genau jenen Elementen, die man durch Induktionsbasis und ein- oder mehrmalige Anwendung des Induktionsschritts erhält.

Definition (induktiv)

Eine Menge M kann induktiv definiert werden durch:

- Induktionsbasis: Man gibt ein oder mehr Elemente von M an.
- Induktionsschritt: Man spezifiziert, wie man neue Elemente von M aus den vorliegenden Elementen von M bekommt.

Die Menge M besteht dann aus genau jenen Elementen, die man durch Induktionsbasis und ein- oder mehrmalige Anwendung des Induktionsschritts erhält.

Beispiel

Die Formeln der Aussagenlogik sind induktiv definiert:

1. Eine atomare Formel p ist eine Formel
2. ein Wahrheitswertsymbol (True, False) ist eine Formel
3. Wenn A und B Formeln sind, dann sind $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$ auch Formeln

Satz (Strukturelle Induktion)

1. *Die Aussage $A(x)$ soll für alle Strukturen $x \in M$, die induktiv definiert sind, gezeigt werden*

Satz (Strukturelle Induktion)

1. *Die Aussage $A(x)$ soll für alle Strukturen $x \in M$, die induktiv definiert sind, gezeigt werden*
2. *Wir gehen wie folgt vor:*
   - *Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(x)$ für die Basisstruktur(en) x gilt*
   - *Induktionsschritt: Wir wählen eine Struktur y, die rekursiv aus den Strukturen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ gebildet wird. IH besagt, dass die Aussagen $A(y_1)$, $A(y_2)$, $\ldots$, $A(y_k)$ wahr sind. Mit Hilfe der IH zeigen wir $A(y)$*

Satz (Strukturelle Induktion)

1. *Die Aussage $A(x)$ soll für alle Strukturen $x \in M$, die induktiv definiert sind, gezeigt werden*
2. *Wir gehen wie folgt vor:*
   - *Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(x)$ für die Basisstruktur(en) x gilt*
   - *Induktionsschritt: Wir wählen eine Struktur y, die rekursiv aus den Strukturen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ gebildet wird. IH besagt, dass die Aussagen $A(y_1)$, $A(y_2)$, ..., $A(y_k)$ wahr sind. Mit Hilfe der IH zeigen wir $A(y)$*

Beweis.

Wir zeigen die Korrektheit der strukturellen Induktion:

1. Es genügt eine Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ zu finden, sodass eine wohlfundierte Ordnung $<$ mittels $x < y :\Leftrightarrow f(x) <_{\mathbb{N}} f(y)$ definierbar ist
2. Wir wählen die Ableitungsschritte der Definition von $x \in M$

Satz (Strukturelle Induktion)

1. *Die Aussage $A(x)$ soll für alle Strukturen $x \in M$, die induktiv definiert sind, gezeigt werden*
2. *Wir gehen wie folgt vor:*
   - *Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(x)$ für die Basisstruktur(en) x gilt*
   - *Induktionsschritt: Wir wählen eine Struktur y, die rekursiv aus den Strukturen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ gebildet wird. IH besagt, dass die Aussagen $A(y_1)$, $A(y_2)$, $\ldots$, $A(y_k)$ wahr sind. Mit Hilfe der IH zeigen wir $A(y)$*

Beweis.

Wir zeigen die Korrektheit der strukturellen Induktion:

1. Es genügt eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$ zu finden, sodass eine wohlfundierte Ordnung $<$ mittels $x < y :\Leftrightarrow f(x) <_{\mathbb{N}} f(y)$ definierbar ist
2. Wir wählen die Ableitungsschritte der Definition von $x \in M$ ∎

Asymptotisches Wachstum

Definition (Groß-O)

Sei $g\colon \{\ell, \ell+1, \ell+2, \ldots\} \to [0, \infty)$ mit $\ell \in \mathbb{N}$.
Die Menge $\mathrm{O}(g)$ umfasst alle Funktionen

$$f\colon \{k, k+1, k+2, \ldots\} \to [0, \infty) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

für die eine positive reelle Zahl c und eine natürliche Zahl m mit $m \geqslant k$ und $m \geqslant \ell$ existieren, sodass für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqslant m$

$$f(n) \leqslant c \cdot g(n)$$

gilt. In Kurzform ist $f \in \mathrm{O}(g)$, wenn für hinreichend große Argumente der Funktionswert von f durch ein konstantes Vielfaches des Funktionswerts von g nach oben beschränkt ist.

Groß-Omega und Groß-Theta

Definition (Groß-Omega und Groß-Theta)

- Die Menge $\Omega(g)$ umfasst alle Funktionen

$$f\colon \{k, k+1, k+2, \ldots\} \to [0, \infty) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

  für die eine positive reelle Zahl c und eine natürliche Zahl m mit $m \geqslant k$ und $m \geqslant \ell$ existieren, sodass für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqslant m$

$$f(n) \geqslant c \cdot g(n)$$

  gilt. In Kurzform ist $f \in \Omega(g)$, wenn für hinreichend große Argumente der Funktionswert von f durch ein konstantes Vielfaches des Funktionswerts von g nach unten beschränkt ist.
- Schließlich ist

$$\Theta(g) := O(g) \cap \Omega(g)\,.$$

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto 3n^2 + 5n + 100$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$. Dann ist $f \in \Theta(g)$.

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto 3n^2 + 5n + 100$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$. Dann ist $f \in \Theta(g)$.

Beweis.

- Wir zeigen $f \in \mathrm{O}(g)$.
  In der Definition wählen wir $c = 4$ und $m = 13$. Aus Aufgabe 3.2 folgt $f(n) \leqslant 4 \cdot g(n)$ für alle $n \geqslant 13$.
- Wir zeigen $f \in \Omega(g)$.
  In der Definition wählen wir $c = 1$ und $m = 0$. Mittels vollständiger Induktion zeigen wir $f(n) \geqslant g(n)$ für alle $n \geqslant 0$.
- Somit gilt $f \in \Theta(g)$.

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto 3n^2 + 5n + 100$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$. Dann ist $f \in \Theta(g)$.

Beweis.

- Wir zeigen $f \in \mathrm{O}(g)$.
  In der Definition wählen wir $c = 4$ und $m = 13$. Aus Aufgabe 3.2 folgt $f(n) \leqslant 4 \cdot g(n)$ für alle $n \geqslant 13$.
- Wir zeigen $f \in \Omega(g)$.
  In der Definition wählen wir $c = 1$ und $m = 0$. Mittels vollständiger Induktion zeigen wir $f(n) \geqslant g(n)$ für alle $n \geqslant 0$.
- Somit gilt $f \in \Theta(g)$.

$\blacksquare$

Infimum, Supremum und Grenzwerte

Definition

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf M und $S \subseteq M$.

- Dann ist $y \in M$ ein Infimum von S, wenn für alle $x \in S$ $y \leq x$ gilt und für alle $z \in M$ mit dieser Eigenschaft gilt, dass $z \leq y$ (größte untere Schranke).
- Dann ist $y \in M$ ein Supremum von S, wenn für alle $x \in S$ $x \leq y$ gilt und für alle $z \in M$ mit dieser Eigenschaft gilt, dass $y \leq z$ (kleinste obere Schranke).

Infimum, Supremum und Grenzwerte

Definition

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf M und $S \subseteq M$.

- Dann ist $y \in M$ ein Infimum von S, wenn für alle $x \in S$ $y \leq x$ gilt und für alle $z \in M$ mit dieser Eigenschaft gilt, dass $z \leq y$ (größte untere Schranke).
- Dann ist $y \in M$ ein Supremum von S, wenn für alle $x \in S$ $x \leq y$ gilt und für alle $z \in M$ mit dieser Eigenschaft gilt, dass $y \leq z$ (kleinste obere Schranke).

Bemerkung

Infimum oder Supremum müssen nicht immer existieren

Definition

Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ eine Abbildung. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L$$

wenn es für alle positiven reellen ε ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|f(n) - L| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant m$. Man nennt L den Grenzwert bzw. Limes von f.

Definition

Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ eine Abbildung. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L$$

wenn es für alle positiven reellen ε ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|f(n) - L| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant m$. Man nennt L den Grenzwert bzw. Limes von f.

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ mit $n \mapsto n^2$ und $g\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ mit $n \mapsto \frac{1}{n}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$. Die Abbildung $h\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ mit

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

besitzt keinen Grenzwert.

Definition (Limes inferior und superior)

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0, \infty)$. Dann ist

$$\liminf_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right)$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right).$$

Hier bezeichnet $\inf$ ($\sup$) das Infimum (Supremum).

Definition (Limes inferior und superior)

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$. Dann ist

  $$\liminf_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right)$$

  und

  $$\limsup_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right).$$

  Hier bezeichnet $\inf$ ($\sup$) das Infimum (Supremum).
- Als Elemente der erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup [-\infty, +\infty]$ existieren Limes inferior und Limes superior für jede Folge reeller Zahlen $f(n)_{n\geqslant\ell}$

Definition (Limes inferior und superior)

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$. Dann ist

$$\liminf_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right)$$

  und

$$\limsup_{n\to\infty} f(n) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(m) \mid m \geqslant n\}\right).$$

  Hier bezeichnet $\inf$ ($\sup$) das Infimum (Supremum).

- Als Elemente der erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup [-\infty, +\infty]$ existieren Limes inferior und Limes superior für jede Folge reeller Zahlen $f(n)_{n\geqslant\ell}$

Satz

Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$. Wenn $\lim_{n\to\infty} f(n)$ definiert ist, dann gilt
$\lim_{n\to\infty} f(n) = \limsup_{n\to\infty} f(n) = \liminf_{n\to\infty} f(n)$. ∎

Satz

Seien $f\colon \{k, k+1, \dots\} \to [0,\infty)$ *und* $g\colon \{\ell, \ell+1, \dots\} \to (0,\infty)$. *Dann gilt*

$$f \in \mathrm{O}(g) \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

und

$$f \in \Omega(g) \;\Leftrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0\,.$$

Satz

Seien $f\colon \{k, k+1, \ldots\} \to [0, \infty)$ *und* $g\colon \{\ell, \ell+1, \ldots\} \to (0, \infty)$. *Dann gilt*

$$f \in \mathrm{O}(g) \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

und

$$f \in \Omega(g) \;\Leftrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0\,.$$

Beweis.

Wir zeigen die erste Äquivalenz, die zweite ist analog. Wenn $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ für hinreichend große n gilt, dann ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c$.

Wenn umgekehrt $s := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ ist, dann gilt $\frac{f(n)}{g(n)} \leqslant s + 1$ für hinreichend große n.

Satz

Seien $f\colon \{k, k+1, \ldots\} \to [0, \infty)$ *und* $g\colon \{\ell, \ell+1, \ldots\} \to (0, \infty)$. *Dann gilt*

$$f \in \mathrm{O}(g) \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

und

$$f \in \Omega(g) \;\Leftrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0\,.$$

Beweis.

Wir zeigen die erste Äquivalenz, die zweite ist analog. Wenn $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ für hinreichend große n gilt, dann ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c$.

Wenn umgekehrt $s := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ ist, dann gilt $\frac{f(n)}{g(n)} \leqslant s + 1$ für hinreichend große n. ∎

Definition (Klein-o)

Seien $f\colon \{k, k+1, \ldots\} \to [0, \infty)$ und $g\colon \{\ell, \ell+1, \ldots\} \to (0, \infty)$. Dann ist $f \in \mathrm{o}(g)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\,,$$

d.h. asymptotisch ist f vernachlässigbar gegenüber g.

Definition (Klein-o)

Seien $f\colon \{k, k+1, \ldots\} \to [0, \infty)$ und $g\colon \{\ell, \ell+1, \ldots\} \to (0, \infty)$. Dann ist $f \in \mathrm{o}(g)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\,,$$

d.h. asymptotisch ist f vernachlässigbar gegenüber g.

Beispiel

Es gilt $n \in \mathrm{o}(n^2)$, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

aber $n \notin \mathrm{o}(2n)$, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$