universität innsbruck

Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch
Burak Ekici
Johannes Koch
Georg Moser
David Obwaller
Vincent van Oostrom
Oleksandra Panasiuk

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung der letzten LVA

Wohlfundierte Induktion

1. Sei $\leq$ eine wohlfundierte Ordnung auf einer Menge M
2. Wir gehen wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(m)$ wahr ist für alle minimalen Elemente m von M.
   - Induktionsschritt: Sei x ein nicht-minimales Element von M, und sei $A(y)$ wahr für alle Vorgänger y von x. Wir zeigen, dass auch $A(x)$ wahr ist
3. Dann ist $A(x)$ für alle $x \in M$ wahr

Strukturelle Induktion

1. Wir gehen wie folgt vor:
   - Induktionsbasis: Wir zeigen, dass $A(x)$ für die Basisstruktur(en) x gilt.
   - Induktionsschritt: Sei Strukur y aus $y_1, y_2, \dots, y_k$ gebildet; IH besagt, dass $A(y_1)$, $A(y_2), \dots, A(y_k)$ wahr sind. Mit Hilfe der Induktionshypothese zeigen wir nun $A(y)$.

Asymptotisches Wachstum

Satz

Seien $f\colon \{k, k+1, \dots\} \to [0, \infty)$ *und* $g\colon \{\ell, \ell+1, \dots\} \to (0, \infty)$. *Dann gilt*

$$f \in \mathrm{O}(g) \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

Definition (Klein-o)

Seien $f\colon \{k, k+1, \dots\} \to [0, \infty)$ und $g\colon \{\ell, \ell+1, \dots\} \to (0, \infty)$. Dann ist $f \in \mathrm{o}(g)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\,,$$

d.h. asymptotisch ist f vernachlässigbar gegenüber g.

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Definition (Gerichteter Multigraph)

Ein gerichteter Multigraph G ist gegeben durch

- eine Eckenmenge oder Knotenmenge E
- eine Kantenmenge K
- Abbildungen $q\colon K \to E$, $z\colon K \to E$, die Anfangsecke $q(k)$ und Endecke $z(k)$ zuordnen
- k heißt Kante von $q(k)$ nach $z(k)$

Definition (Gerichteter Multigraph)

Ein gerichteter Multigraph G ist gegeben durch

- eine Eckenmenge oder Knotenmenge E
- eine Kantenmenge K
- Abbildungen $q: K \to E$, $z: K \to E$, die Anfangsecke $q(k)$ und Endecke $z(k)$ zuordnen
- k heißt Kante von $q(k)$ nach $z(k)$

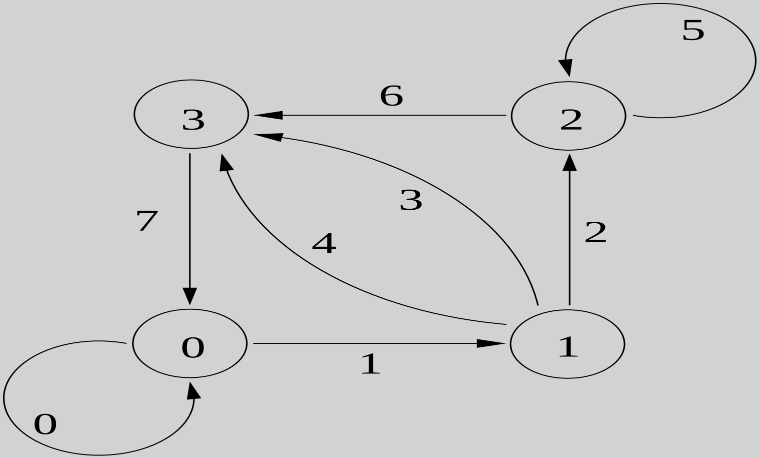
Beispiel

Sei $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $K = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ und die Abbildungen q und z wie folgt

k	$q(k)$	$z(k)$
0	0	0
1	0	1
2	1	2
3	1	3

k	$q(k)$	$z(k)$
4	1	3
5	2	2
6	2	3
7	3	0

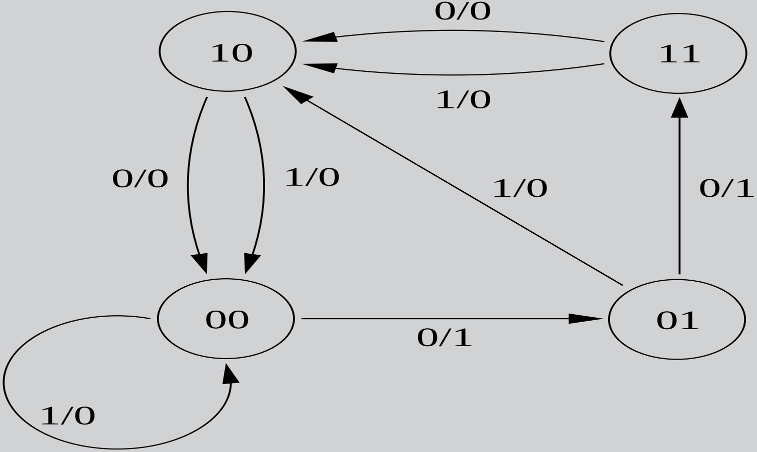
Beispiel (Fortsetzung)



Definition

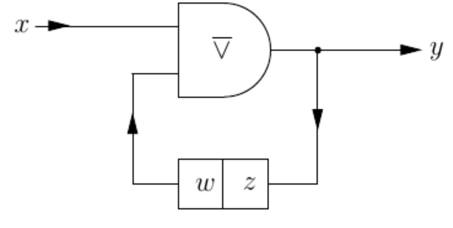
- Ecke c heißt unmittelbarer Vorgänger der Ecke d, wenn es eine Kante von c nach d gibt
- d heißt unmittelbarer Nachfolger von c
- Schleifen sind Kanten mit der gleichen Anfangs- wie Endecke
- Kanten mit den gleichen Anfangsecken und den gleichen Endecken heißen parallel
- Zahl der Kanten mit Endecke e ist der Eingangsgrad von e
- Zahl der Kanten mit Anfangsecke e ist der Ausgangsgrad von e
- Gegeben Abbildungen $a: E \to M$, $b: K \to N$; dann heißt Multigraph ecken- bzw. kantenbeschriftet
- Sei $M = \mathbb{R}$ bzw. $N = \mathbb{R}$, dann ecken- bzw. kantenbewertet

Beispiel



Beispiel (Fortsetzung)

Der vorige Graph ist das Zustandsdiagramm eines synchronen Schaltwerk mit Eingang x, Ausgang y, einem NOR-Gatter und einem Schieberegister der Länge 2



lauten die Gleichungen für die binären Signalfolgen

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \,\overline{\vee}\, w(t) \\ w(t+1) &= z(t) \\ z(t+1) &= y(t) \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{N}$ diskrete Zeit

Definition

- Ein gerichteter Graph (oder Digraph) ist ein gerichteter Multigraph ohne parallele Kanten
- Zu jedem Eckenpaar (c, d) gibt es höchstens eine Kante $k \in K$ mit $q(k) = c$ und $z(k) = d$
- Statt Kante k schreibt man das Eckenpaar (c, d)

Definition

- Ein gerichteter Graph (oder Digraph) ist ein gerichteter Multigraph ohne parallele Kanten
- Zu jedem Eckenpaar (c, d) gibt es höchstens eine Kante $k \in K$ mit $q(k) = c$ und $z(k) = d$
- Statt Kante k schreibt man das Eckenpaar (c, d)

Beispiel

Sei R eine Relation auf einer Menge M. Dann ist der gerichtete Graph der Relation gegeben durch

- die Eckenmenge M
- die Kantenmenge R
- die Abbildungen $q((x, y)) = x$ und $z((x, y)) = y$

Definition

- Sei $G = (E, K, q, z)$ ein gerichteter Multigraph
- $G' = (E', K', q', z')$ heißt Teilmultigraph von G, wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $q'(k) = q(k)$, $z'(k) = z(k)$ für alle $k \in K'$
- Ein Teilgraph ist ein Teilmultigraph, der selbst Graph ist

Definition

- Sei $G = (E, K, q, z)$ ein gerichteter Multigraph
- $G' = (E', K', q', z')$ heißt Teilmultigraph von G, wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $q'(k) = q(k)$, $z'(k) = z(k)$ für alle $k \in K'$
- Ein Teilgraph ist ein Teilmultigraph, der selbst Graph ist

Definition

Sei (E, K, q, z) ein gerichteter Multigraph, und seien c, d Ecken

- Ein Tupel $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}) \in K^\ell$ heißt ein Weg von c nach d der Länge ℓ, wenn es Ecken $e_0, e_1, \ldots, e_\ell$ gibt mit $e_0 = c$, $e_\ell = d$, und $q(k_i) = e_i$, sowie $z(k_i) = e_{i+1}$ für $i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$
- e_0 die Anfangsecke
- e_ℓ die Endecke
- $e_1, e_2, \ldots, e_{\ell-1}$ die Zwischenecken

Definition (Fortsetzung)

- Für jede Ecke $e \in E$ ist das leere Tupel $() \in K^0$ der leere Weg mit Anfangsecke e und Endecke e
- Der Multigraph heißt stark zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Die Verkettung der Wege $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ (von c nach d) und $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ (von d nach e) ist ein Weg

  $$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}, h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$$

  von c nach e
- Ein Weg heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endecke gleich sind
- Ein nichtleerer geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten wird ein Zykel genannt; gerichtete Multigraphen ohne Zyklen heißen zyklenfrei

Definition

- Ein Wurzelbaum ist ein gerichteter Graph, in dem es eine Ecke gibt, von der zu jeder Ecke genau ein Weg führt
- Jeder Wurzelbaum ist zyklenfrei
- Ecken eines Wurzelbaums vom Ausgangsgrad 0 nennt man Blätter

Definition

- Ein Wurzelbaum ist ein gerichteter Graph, in dem es eine Ecke gibt, von der zu jeder Ecke genau ein Weg führt
- Jeder Wurzelbaum ist zyklenfrei
- Ecken eines Wurzelbaums vom Ausgangsgrad 0 nennt man Blätter

Satz

Sei G ein gerichteter Multigraph.

(1) *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann man aus p durch Weglassen von Kanten einen einfachen Weg von c nach d erhalten*

(2) *Jeder einfache geschlossene Weg ist ein Zykel*

Definition

- Ein Wurzelbaum ist ein gerichteter Graph, in dem es eine Ecke gibt, von der zu jeder Ecke genau ein Weg führt
- Jeder Wurzelbaum ist zyklenfrei
- Ecken eines Wurzelbaums vom Ausgangsgrad 0 nennt man Blätter

Satz

Sei G ein gerichteter Multigraph.

(1) *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann man aus p durch Weglassen von Kanten einen einfachen Weg von c nach d erhalten*

(2) *Jeder einfache geschlossene Weg ist ein Zykel*

Beweis von (2).

Sei p ein einfacher Weg von e nach e; wenn zwei Kanten gleich sind, dann wären auch ihre Anfangsecken gleich. Widerspruch

Definition

- Ein Wurzelbaum ist ein gerichteter Graph, in dem es eine Ecke gibt, von der zu jeder Ecke genau ein Weg führt
- Jeder Wurzelbaum ist zyklenfrei
- Ecken eines Wurzelbaums vom Ausgangsgrad 0 nennt man Blätter

Satz

Sei G ein gerichteter Multigraph.

(1) *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann man aus p durch Weglassen von Kanten einen einfachen Weg von c nach d erhalten*

(2) *Jeder einfache geschlossene Weg ist ein Zykel*

Beweis von (2).

Sei p ein einfacher Weg von e nach e; wenn zwei Kanten gleich sind, dann wären auch ihre Anfangsecken gleich. Widerspruch ∎

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$*,*

$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$

ist die Adjazenzmatrix

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$*,*
$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$
ist die Adjazenzmatrix
- *Für* $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gibt* $(A^\ell)_{ij}$ *die Anzahl der Wege von* e_i *nach* e_j *der Länge* ℓ *an*

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$,
$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$
ist die Adjazenzmatrix
- *Für* $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gibt* $(A^\ell)_{ij}$ *die Anzahl der Wege von* e_i *nach* e_j *der Länge* ℓ *an*

Beweis.

- Für $\ell = 0$ ist $A^\ell = I_n$ und es gibt nur den leeren Weg

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$,

$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$

  ist die Adjazenzmatrix
- *Für* $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gibt* $(A^\ell)_{ij}$ *die Anzahl der Wege von* e_i *nach* e_j *der Länge* ℓ *an*

Beweis.

- Für $\ell = 0$ ist $A^\ell = I_n$ und es gibt nur den leeren Weg
- Für $\ell = 1$ erhalten wir die Definition

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n\times n}$,
$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$
ist die Adjazenzmatrix
- *Für* $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gibt* $(A^\ell)_{ij}$ *die Anzahl der Wege von* e_i *nach* e_j *der Länge* ℓ *an*

Beweis.

- Für $\ell = 0$ ist $A^\ell = I_n$ und es gibt nur den leeren Weg
- Für $\ell = 1$ erhalten wir die Definition
- Für $\ell > 1$ gilt $(A^\ell)_{ij} = \sum_{r=0}^{n-1}(A^{\ell-1})_{ir} \cdot A_{rj}$ Nach IH zählt $(A^{\ell-1})_{ir}$ alle Wege von e_i nach e_r der Länge $\ell - 1$, und A_{rj} zählt alle Kanten von e_r nach e_j. Die Behauptung gilt

Satz (Adjazenzenmatrix)

- *Sei* (E, K, q, z) *ein gerichteter Multigraph mit endlicher Ecken- und Kantenmenge; wir nummerieren die Ecken als* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- *Die Matrix* $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$,
$$A_{ij} := \#(\{k \in K \mid q(k) = e_i \text{ und } z(k) = e_j\})$$
ist die Adjazenzmatrix
- *Für* $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gibt* $(A^\ell)_{ij}$ *die Anzahl der Wege von* e_i *nach* e_j *der Länge* ℓ *an*

Beweis.

- Für $\ell = 0$ ist $A^\ell = I_n$ und es gibt nur den leeren Weg
- Für $\ell = 1$ erhalten wir die Definition
- Für $\ell > 1$ gilt $(A^\ell)_{ij} = \sum_{r=0}^{n-1} (A^{\ell-1})_{ir} \cdot A_{rj}$ Nach IH zählt $(A^{\ell-1})_{ir}$ alle Wege von e_i nach e_r der Länge $\ell - 1$, und A_{rj} zählt alle Kanten von e_r nach e_j. Die Behauptung gilt ∎

Beispiel

Die Adjazenzmatrix für den Multigraphen aus dem ersten Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Die Adjazenzmatrix für den Multigraphen aus dem ersten Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz

Sei R eine Relation auf einer Menge M und sei G der gerichtete Graph von R. Dann beschreibt

$$T := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt in } G \text{ einen einfachen Weg von } x \text{ nach } y\}$$

die transitive Hülle, also die kleinste transitive Relation, die R enthält

Beweis.

- Die Relation T ist transitiv und enthält die Relation R

Beweis.

- Die Relation T ist transitiv und enthält die Relation R
- Um zu zeigen, dass T die kleinste transitive Relation ist, die R enthält, sei S eine transitive Relation mit $R \subseteq S$; wir zeigen $T \subseteq S$

Beweis.

- Die Relation T ist transitiv und enthält die Relation R
- Um zu zeigen, dass T die kleinste transitive Relation ist, die R enthält, sei S eine transitive Relation mit $R \subseteq S$; wir zeigen $T \subseteq S$
- Wenn $(x, y) \in T$ ist, dann gibt es einen einfachen Weg in G von x nach y mit Zwischenecken $z_1, z_2, \ldots, z_{\ell-1}$, somit gilt

$$(x, z_1) \in R\,,\ (z_1, z_2) \in R\,, \ldots,\ (z_{\ell-1}, y) \in R\,,$$

daher auch

$$(x, z_1) \in S\,,\ (z_1, z_2) \in S\,, \ldots,\ (z_{\ell-1}, y) \in S\,,$$

und wegen der Transitivität von S auch $(x, y) \in S$

Beweis.

- Die Relation T ist transitiv und enthält die Relation R
- Um zu zeigen, dass T die kleinste transitive Relation ist, die R enthält, sei S eine transitive Relation mit $R \subseteq S$; wir zeigen $T \subseteq S$
- Wenn $(x, y) \in T$ ist, dann gibt es einen einfachen Weg in G von x nach y mit Zwischenecken $z_1, z_2, \ldots, z_{\ell-1}$, somit gilt

$$(x, z_1) \in R\,,\ (z_1, z_2) \in R\,, \ldots,\ (z_{\ell-1}, y) \in R\,,$$

daher auch

$$(x, z_1) \in S\,,\ (z_1, z_2) \in S\,, \ldots,\ (z_{\ell-1}, y) \in S\,,$$

und wegen der Transitivität von S auch $(x, y) \in S$

∎

Algorithmus von Floyd-Warshall, transitive Hülle

Satz

1. *Sei R eine Relation auf einer Menge M mit n Elementen und sei A die Adjazenzmatrix von R (wie vorhin definiert)*
2. *Der folgende Algorithmus mit $O(n^3)$ Bitoperationen überschreibt A mit der Adjazenzmatrix der transitiven Hülle von R*

> *Für r von 0 bis $n-1$ wiederhole:*
>
>   *Setze $N = A$.*
>
>   *Für i von 0 bis $n-1$ wiederhole:*
>
>   *Für j von 0 bis $n-1$ wiederhole:*
>
>   *Falls $A_{ij} = 0$ und $A_{ir} = 1$ und $A_{rj} = 1$, setze $N_{ij} = 1$.*
>
>   *Setze $A = N$.*

Beispiel

Für die Relation $R = \{(0,2),(1,0),(2,1)\}$ auf der Menge $\{0,1,2\}$ ist die transitive Hülle

$$T = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

Beispiel

Für die Relation $R = \{(0,2),(1,0),(2,1)\}$ auf der Menge $\{0,1,2\}$ ist die transitive Hülle

$$T = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

Adjazenzmatrix und erste Iteration ($r = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zweite ($r = 1$) und dritte ($r = 2$) Iteration

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hilfsdefinition

- Für $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei P_r die Menge aller einfachen Wege im Graphen von R, die nur Zwischenecken aus der Menge $\{e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ haben
- Dann ist
  1. P_0 die Menge aller Kanten von G und
  2. P_n ist die Menge aller einfachen Wege in G.

Hilfsdefinition

- Für $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei P_r die Menge aller einfachen Wege im Graphen von R, die nur Zwischenecken aus der Menge $\{e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ haben
- Dann ist
  1. P_0 die Menge aller Kanten von G und
  2. P_n ist die Menge aller einfachen Wege in G.

Lemma

Sei nun $r < n$. Für einen Weg p in P_{r+1} gibt es zwei Fälle:

Hilfsdefinition

- Für $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei P_r die Menge aller einfachen Wege im Graphen von R, die nur Zwischenecken aus der Menge $\{e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ haben
- Dann ist
  1. P_0 die Menge aller Kanten von G und
  2. P_n ist die Menge aller einfachen Wege in G.

Lemma

Sei nun $r < n$. Für einen Weg p in P_{r+1} gibt es zwei Fälle:

- *e_r ist keine Zwischenecke von p. Dann ist p in P_r.*

Hilfsdefinition

- Für $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei P_r die Menge aller einfachen Wege im Graphen von R, die nur Zwischenecken aus der Menge $\{e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ haben
- Dann ist
  1. P_0 die Menge aller Kanten von G und
  2. P_n ist die Menge aller einfachen Wege in G.

Lemma

Sei nun $r < n$. Für einen Weg p in P_{r+1} gibt es zwei Fälle:

- *e_r ist keine Zwischenecke von p. Dann ist p in P_r.*
- *e_r ist eine Zwischenecke von p. Dann kann der Weg p von e nach d als Verkettung eines Weges u von e nach e_r und eines Weges v von e_r nach d geschrieben werden, die beide in P_r liegen.*

Beweis des Satz von Floyd-Warshall

- Für $r = 0, 1, \ldots, n$ sei

$$R_r := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt einen Weg in } P_r \text{ von } x \text{ nach } y\} \,.$$

Beweis des Satz von Floyd-Warshall

- Für $r = 0, 1, \ldots, n$ sei

$$R_r := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt einen Weg in } P_r \text{ von } x \text{ nach } y\}\,.$$

- Dann ist $R_0 = R$ und R_n ist die transitive Hülle von R

Beweis des Satz von Floyd-Warshall

- Für $r = 0, 1, \ldots, n$ sei

$$R_r := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt einen Weg in } P_r \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

- Dann ist $R_0 = R$ und R_n ist die transitive Hülle von R
- Der Algorithmus von Floyd-Warshall berechnet für $r = 0, 1, \ldots, n-1$ aus der Adjazenzmatrix von R_r die Adjazenzmatrix von R_{r+1}

Beweis des Satz von Floyd-Warshall

- Für $r = 0, 1, \ldots, n$ sei

$$R_r := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt einen Weg in } P_r \text{ von } x \text{ nach } y\}\,.$$

- Dann ist $R_0 = R$ und R_n ist die transitive Hülle von R
- Der Algorithmus von Floyd-Warshall berechnet für $r = 0, 1, \ldots, n-1$ aus der Adjazenzmatrix von R_r die Adjazenzmatrix von R_{r+1}

$\blacksquare$

Beweis des Satz von Floyd-Warshall

- Für $r = 0, 1, \dots, n$ sei

$$R_r := \{(x, y) \in M^2 \mid \text{es gibt einen Weg in } P_r \text{ von } x \text{ nach } y\}\,.$$

- Dann ist $R_0 = R$ und R_n ist die transitive Hülle von R
- Der Algorithmus von Floyd-Warshall berechnet für $r = 0, 1, \dots, n-1$ aus der Adjazenzmatrix von R_r die Adjazenzmatrix von R_{r+1}

■

Definition

Sei G ein gerichteter Multigraph mit nichtnegativer Kantenbewertung b

- Die Länge eines Weges $(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1})$ bezüglich b ist die Summe der Bewertungen seiner Kanten k_i
- Der Abstand von Ecke e zu Ecke d ist die minimale Länge eines Weges von e nach d, falls ein solcher existiert, und ∞ sonst

Algorithmus von Floyd-Warshall, Eckenabstände

Definition

- Sei G ein gerichteter Multigraph mit einer endlichen Eckenmenge E, einer endlichen Kantenmenge K und einer nichtnegativen Kantenbewertung b
- Wir nummerieren die Ecken $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$
- Sei B die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$B_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ \min\{b(k) \mid k \text{ Kante von } e_i \text{ nach } e_j\} & i \neq j \text{ und Kante von } e_i \text{ nach } e_j \text{ existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz

Der folgende Algorithmus mit $\mathrm{O}(n^3)$ *Rechenoperationen überschreibt die Matrix* B *mit der Matrix der Eckenabstände*

> *Für* r *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
>
>   *Setze* $N = B$.
>
>   *Für* i *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
>
>   *Für* j *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
>
>   *Falls* $B_{ir} + B_{rj} < B_{ij}$, *setze* $N_{ij} = B_{ir} + B_{rj}$.
>
>   *Setze* $B = N$.

Satz

Der folgende Algorithmus mit $\mathrm{O}(n^3)$ *Rechenoperationen überschreibt die Matrix* B *mit der Matrix der Eckenabstände*

Für r *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
Setze $N = B$.
Für i *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
Für j *von* 0 *bis* $n-1$ *wiederhole:*
Falls $B_{ir} + B_{rj} < B_{ij}$, *setze* $N_{ij} = B_{ir} + B_{rj}$.
Setze $B = N$.

Beweis.

Analog zum Beweis des vorigen Satzes ∎

Definition

Sei G ein gerichteter Multigraph und sei S eine Teilmenge der Eckenmenge. Eine Ecke d von G heißt von S erreichbar, wenn es einen Weg in G gibt mit der Endecke d und der Anfangsecke in S

Definition

Sei G ein gerichteter Multigraph und sei S eine Teilmenge der Eckenmenge. Eine Ecke d von G heißt von S erreichbar, wenn es einen Weg in G gibt mit der Endecke d und der Anfangsecke in S

Satz

Der folgende Algorithmus markiert alle von einer Startmenge S erreichbaren Ecken mit $O(\#(E) \cdot \#(K))$ Operationen

> *Markiere die Ecken in S.*
>
> *Solange S nichtleer ist, wiederhole:*
>
> *Wähle eine Ecke e in S und entferne sie aus S.*
>
> *Bestimme alle unmarkierten unmittelbaren Nachfolger von e,*
>
> *markiere sie und gebe sie zu S dazu.*

Beweis.

- Da jede Ecke von G höchstens einmal aus S entfernt wird, terminiert der Algorithmus
- Eine Ecke d ist genau dann von der Ecke e erreichbar, wenn d gleich e ist oder d von den unmittelbaren Nachfolgern von e erreicht werden kann
- Bei jeder Iteration bleibt in Zeile 2 die Eigenschaft von Ecken,

  markiert oder von S erreichbar zu sein,

  gleich (Schleifeninvariante)
- Am Anfang bedeutet dies, von der Startmenge erreichbar zu sein, und am Ende, markiert zu sein

Beweis.

- Da jede Ecke von G höchstens einmal aus S entfernt wird, terminiert der Algorithmus
- Eine Ecke d ist genau dann von der Ecke e erreichbar, wenn d gleich e ist oder d von den unmittelbaren Nachfolgern von e erreicht werden kann
- Bei jeder Iteration bleibt in Zeile 2 die Eigenschaft von Ecken,

  markiert oder von S erreichbar zu sein,

  gleich (Schleifeninvariante)
- Am Anfang bedeutet dies, von der Startmenge erreichbar zu sein, und am Ende, markiert zu sein

∎

Satz

1. *Für Ecken e und d schreiben wir* $d < e$*, falls es in G einen einfachen Weg von d nach e gibt*
2. *Dann ist* $\leq$ *eine partielle Ordnung auf E genau dann, wenn G zyklenfrei ist*

Satz

1. *Für Ecken e und d schreiben wir $d < e$, falls es in G einen einfachen Weg von d nach e gibt*
2. *Dann ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf E genau dann, wenn G zyklenfrei ist*

Beweis.

$\leq$ ist partielle Ordnung, wenn ihre Vorgängerrelation $<$ irreflexiv und transitiv

Satz

1. *Für Ecken e und d schreiben wir $d < e$, falls es in G einen einfachen Weg von d nach e gibt*
2. *Dann ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf E genau dann, wenn G zyklenfrei ist*

Beweis.

$\leq$ ist partielle Ordnung, wenn ihre Vorgängerrelation $<$ irreflexiv und transitiv

$\Rightarrow$: Für einen Beweis mittels Kontraposition besitze G einen Zykel (und somit einen nichtleeren Weg) von e nach e; dann existiert ein einfacher Weg von e nach e und somit ist $e < e$. Widerspruch

Satz

1. *Für Ecken e und d schreiben wir $d < e$, falls es in G einen einfachen Weg von d nach e gibt*
2. *Dann ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf E genau dann, wenn G zyklenfrei ist*

Beweis.

$\leq$ ist partielle Ordnung, wenn ihre Vorgängerrelation $<$ irreflexiv und transitiv

$\Rightarrow$: Für einen Beweis mittels Kontraposition besitze G einen Zykel (und somit einen nichtleeren Weg) von e nach e; dann existiert ein einfacher Weg von e nach e und somit ist $e < e$. Widerspruch

$\Leftarrow$: Offensichtlich ist $<$ transitiv; Wenn $<$ nicht irreflexiv ist, dann enthält G einen einfachen geschlossenen Weg also einen Zykel. Widerspruch

Satz

1. *Für Ecken e und d schreiben wir $d < e$, falls es in G einen einfachen Weg von d nach e gibt*
2. *Dann ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf E genau dann, wenn G zyklenfrei ist*

Beweis.

$\leq$ ist partielle Ordnung, wenn ihre Vorgängerrelation $<$ irreflexiv und transitiv

$\Rightarrow$: Für einen Beweis mittels Kontraposition besitze G einen Zykel (und somit einen nichtleeren Weg) von e nach e; dann existiert ein einfacher Weg von e nach e und somit ist $e < e$. Widerspruch

$\Leftarrow$: Offensichtlich ist $<$ transitiv; Wenn $<$ nicht irreflexiv ist, dann enthält G einen einfachen geschlossenen Weg also einen Zykel. Widerspruch

∎

Definition

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M, und seien x und y Elemente von M mit $x < y$. Dann heißt x ein unmittelbarer Vorgänger von y bzw. y ein unmittelbarer Nachfolger von x, in Zeichen

$$x \prec y\,,$$

wenn es kein $z \in M$ mit $x < z < y$ gibt

Definition

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M, und seien x und y Elemente von M mit $x < y$. Dann heißt x ein unmittelbarer Vorgänger von y bzw. y ein unmittelbarer Nachfolger von x, in Zeichen

$$x \prec y\,,$$

wenn es kein $z \in M$ mit $x < z < y$ gibt

Beispiel

In der Potenzmenge von M ist eine Menge S unmittelbarer Vorgänger (bezüglich der Inklusion) einer Menge T genau dann, wenn

$$T = S \cup \{x\}$$

für ein $x \in M \setminus S$ ist

Satz

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf der endlichen Menge M und sei G der Graph der unmittelbaren Vorgängerrelation $\prec$ auf M. Dann gilt für $x, y \in M$

$$x \leq y \text{ genau dann, wenn in } G \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y \text{ existiert},$$

d.h. $<$ ist die transitive Hülle von $\prec$

Satz

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf der endlichen Menge M und sei G der Graph der unmittelbaren Vorgängerrelation $\prec$ auf M. Dann gilt für $x, y \in M$

$$x \leq y \text{ genau dann, wenn in } G \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y \text{ existiert},$$

d.h. $<$ ist die transitive Hülle von $\prec$

Beweisskizze für $\Rightarrow$.

ObdA gilt $x < y$; wir zeigen mit Induktion nach der Zahl der Elemente des Intervalls

$$[x, y] := \{z \in M \mid x \leq z \leq y\} ,$$

dass es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in M$ gibt mit

$$x \prec z_1 \prec \ldots \prec z_n \prec y$$

Satz

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf der endlichen Menge M und sei G der Graph der unmittelbaren Vorgängerrelation $\prec$ auf M. Dann gilt für $x, y \in M$

$$x \leq y \text{ genau dann, wenn in } G \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y \text{ existiert},$$

d.h. $<$ ist die transitive Hülle von $\prec$

Beweisskizze für $\Rightarrow$.

ObdA gilt $x < y$; wir zeigen mit Induktion nach der Zahl der Elemente des Intervalls

$$[x, y] := \{z \in M \mid x \leq z \leq y\} ,$$

dass es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in M$ gibt mit

$$x \prec z_1 \prec \ldots \prec z_n \prec y$$

∎