universität innsbruck

Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch
Burak Ekici
Johannes Koch
Georg Moser
David Obwaller
Vincent van Oostrom
Oleksandra Panasiuk

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition (Gerichteter Multigraph)

Ein gerichteter Multigraph G ist gegeben durch

- eine Eckenmenge oder Knotenmenge E
- eine Kantenmenge K
- Abbildungen $q\colon K \to E$, $z\colon K \to E$; Anfangsecke $q(k)$ und Endecke $z(k)$
- k heißt Kante von $q(k)$ nach $z(k)$

Definition

- Ein gerichteter Graph ist ein gerichteter Multigraph ohne parallele Kanten
- Zu jedem Eckenpaar (c, d) gibt es höchstens eine Kante $k \in K$ mit $q(k) = c$ und $z(k) = d$
- Statt Kante k schreibt man das Eckenpaar (c, d)

Motivation

Vincent presented

```
motivating examples (on blackboard)
  koenigsberg bridges (euler's proof)
  travelling salesman (hamiltonian paths)
  4-colour theorem
  euler's formula V+E-F = 2
  kuratowski planarity K5 K3,3
  state spaces
  divide-and-conquer (merge-sort n log n)
  successor-relation
```

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, ungerichtete Graphen

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

Definition (ungerichteter Multigraph)

Ein **ungerichteter Multigraph** ist gegeben durch

- eine **Eckenmenge** (oder **Knotenmenge**) E
- eine **Kantenmenge** K
- eine Abbildung $r\colon K \to \{\{c, d\} \mid c, d \in E\}$ mit $k \mapsto r(k)$, die jeder Kante k eine Menge $r(k)$ mit einer oder zwei **Endecken** zuordnet
- k ist Kante zwischen diesen Ecken

Definition (ungerichteter Multigraph)

Ein ungerichteter Multigraph ist gegeben durch

- eine Eckenmenge (oder Knotenmenge) E
- eine Kantenmenge K
- eine Abbildung $r\colon K \to \{\{c, d\} \mid c, d \in E\}$ mit $k \mapsto r(k)$, die jeder Kante k eine Menge $r(k)$ mit einer oder zwei Endecken zuordnet
- k ist Kante zwischen diesen Ecken

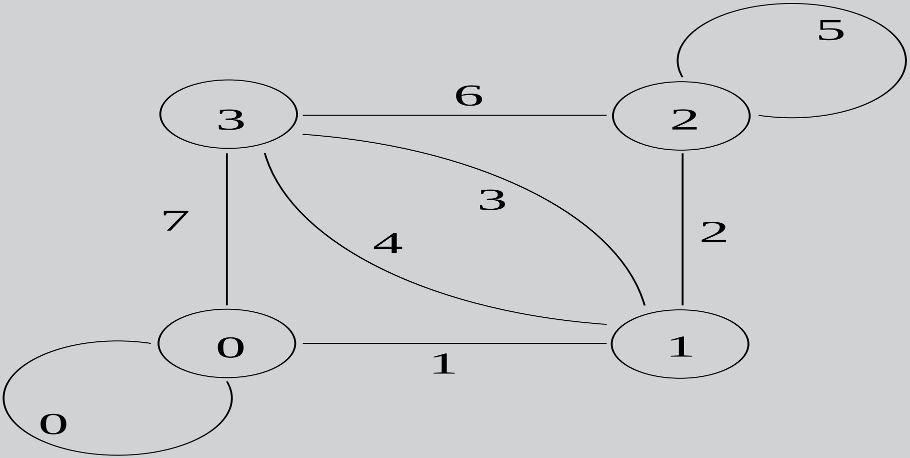
Beispiel

Sei $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $K = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ und der Abbildung r wie folgt

k	$r(k)$
0	$\{0\}$
1	$\{0, 1\}$
2	$\{1, 2\}$
3	$\{1, 3\}$

k	$r(k)$
4	$\{1, 3\}$
5	$\{2\}$
6	$\{2, 3\}$
7	$\{0, 3\}$

Beispiel (Fortsetzung)



Definition

- Ecke c heißt Nachbar der Ecke d, wenn es eine Kante zwischen c und d gibt
- Eine Kante mit nur einer Endecke heißt Schleife
- Kanten mit den gleichen Endecken heißen parallel
- Für eine Ecke e heißt die Zahl der Kanten mit Endecke e der Grad von e
- Gegeben Abbildungen $a\colon E \to M$, $b\colon K \to N$; dann heißt Multigraph ecken- bzw. kantenbeschriftet
- Sei $M = \mathbb{R}$ bzw. $N = \mathbb{R}$, dann ecken- bzw. kantenbewertet

Definition

- Ecke c heißt Nachbar der Ecke d, wenn es eine Kante zwischen c und d gibt
- Eine Kante mit nur einer Endecke heißt Schleife
- Kanten mit den gleichen Endecken heißen parallel
- Für eine Ecke e heißt die Zahl der Kanten mit Endecke e der Grad von e
- Gegeben Abbildungen $a\colon E \to M$, $b\colon K \to N$; dann heißt Multigraph ecken- bzw. kantenbeschriftet
- Sei $M = \mathbb{R}$ bzw. $N = \mathbb{R}$, dann ecken- bzw. kantenbewertet

Definition (ungerichteter Graph)

Ein ungerichteter Graph ist ein ungerichteter Multigraph ohne parallele Kanten; dann gibt es zu jeder Eckenmenge $\{c, d\}$ höchstens eine Kante $k \in K$ mit $r(k) = \{c, d\}$

Beispiel

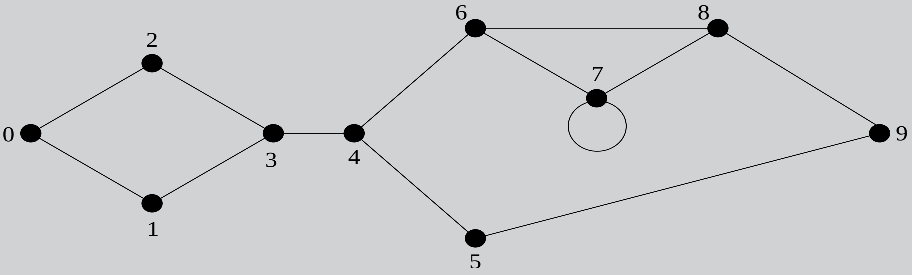
- Eine symmetrische Relation S auf einer Menge M kann durch den ungerichteten Graphen mit
  1. der Eckenmenge M
  2. der Kantenmenge $\{\{x, y\} \mid (x, y) \in S\}$
  3. der Abbildung $r(\{x, y\}) = \{x, y\}$

  visualisiert werden

Beispiel

- Eine symmetrische Relation S auf einer Menge M kann durch den ungerichteten Graphen mit
  1. der Eckenmenge M
  2. der Kantenmenge $\{\{x, y\} \mid (x, y) \in S\}$
  3. der Abbildung $r(\{x, y\}) = \{x, y\}$

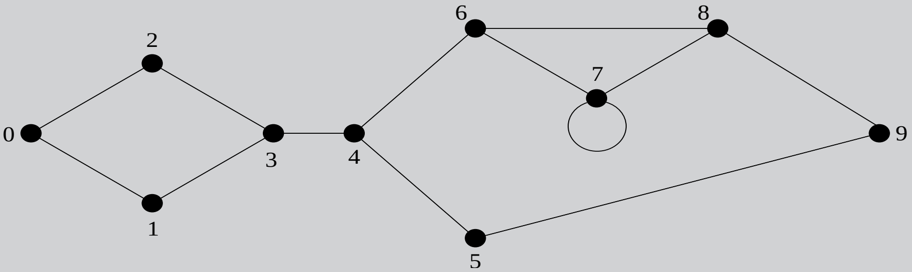
  visualisiert werden
- Jeder ungerichtete Graph ist der Graph einer symmetrischen Relation



Beispiel

- Eine symmetrische Relation S auf einer Menge M kann durch den ungerichteten Graphen mit
  1. der Eckenmenge M
  2. der Kantenmenge $\{\{x, y\} \mid (x, y) \in S\}$
  3. der Abbildung $r(\{x, y\}) = \{x, y\}$

  visualisiert werden
- Jeder ungerichtete Graph ist der Graph einer symmetrischen Relation



- Wir geben die Kantenmenge oft durch ihren Rand (= Endecken) an

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- $G' = (E', K', r')$ heißt Teilmultigraph von G, wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $r'(k) = r(k)$ für alle $k \in K'$
- Ein Teilgraph ist ein Teilmultigraph, der selbst Graph ist

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- $G' = (E', K', r')$ heißt Teilmultigraph von G, wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $r'(k) = r(k)$ für alle $k \in K'$
- Ein Teilgraph ist ein Teilmultigraph, der selbst Graph ist

Definition

Sei (E, K, r) ein ungerichteter Multigraph, und seien c, d Ecken

- Ein Tupel $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}) \in K^\ell$ heißt ein Weg von c nach d der Länge ℓ, wenn es Ecken $e_0, e_1, \ldots, e_\ell$ gibt mit $e_0 = c$, $e_\ell = d$, und $r(k_i) = \{e_i, e_{i+1}\}$ für $i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$
- e_0 die Anfangsecke; e_ℓ die Endecke
- $e_1, e_2, \ldots, e_{\ell-1}$ die Zwischenecken
- Für jede Ecke $e \in E$ ist das leere Tupel $() \in K^0$ der leere Weg mit Anfangsecke e und Endecke e

Definition (Fortsetzung)

- Der ungerichtete Multigraph heißt zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)

Definition (Fortsetzung)

- Der ungerichtete Multigraph heißt zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Für jeden Weg $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-2}, k_{\ell-1})$ von c nach d ist der reziproke Weg $(k_{\ell-1}, k_{\ell-2}, \ldots, k_1, k_0)$ ein Weg von d nach c

Definition (Fortsetzung)

- Der ungerichtete Multigraph heißt zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Für jeden Weg $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-2}, k_{\ell-1})$ von c nach d ist der reziproke Weg $(k_{\ell-1}, k_{\ell-2}, \ldots, k_1, k_0)$ ein Weg von d nach c
- Die Verkettung der Wege $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ (von c nach d) und $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ (von d nach e) ist ein Weg

$$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}, h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$$

von c nach e

Definition (Fortsetzung)

- Der ungerichtete Multigraph heißt zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Für jeden Weg $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-2}, k_{\ell-1})$ von c nach d ist der reziproke Weg $(k_{\ell-1}, k_{\ell-2}, \ldots, k_1, k_0)$ ein Weg von d nach c
- Die Verkettung der Wege $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ (von c nach d) und $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ (von d nach e) ist ein Weg

$$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}, h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$$

  von c nach e
- Ein Weg heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endecke gleich sind

Definition (Fortsetzung)

- Der ungerichtete Multigraph heißt zusammenhängend, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt einfach, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Für jeden Weg $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-2}, k_{\ell-1})$ von c nach d ist der reziproke Weg $(k_{\ell-1}, k_{\ell-2}, \ldots, k_1, k_0)$ ein Weg von d nach c
- Die Verkettung der Wege $(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ (von c nach d) und $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ (von d nach e) ist ein Weg

  $$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}, h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$$

  von c nach e
- Ein Weg heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endecke gleich sind
- Ein nichtleerer geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten wird ein Zykel genannt; ungerichtete Multigraphen ohne Zyklen heißen zyklenfrei

Definition

- Ein Wald ist ein zyklenfreier ungerichteter Multigraph
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad $\leqslant 1$ nennt man Blätter

Definition

- Ein Wald ist ein zyklenfreier ungerichteter Multigraph
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad $\leqslant 1$ nennt man Blätter

Beispiel

Definition

- Ein Wald ist ein zyklenfreier ungerichteter Multigraph
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad $\leqslant 1$ nennt man Blätter

Beispiel

- Im Multigraphen vom ersten Beispiel sind etwa die folgenden Wege von Ecke 0 nach Ecke 3

$$(1, 2, 6), (1, 2, 5, 6), (1, 3), (1, 4), (1, 3, 7, 1, 3), (1, 4, 7, 1, 3), (7)$$

Definition

- Ein Wald ist ein zyklenfreier ungerichteter Multigraph
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad $\leqslant 1$ nennt man Blätter

Beispiel

- Im Multigraphen vom ersten Beispiel sind etwa die folgenden Wege von Ecke 0 nach Ecke 3
$$(1,2,6),(1,2,5,6),(1,3),(1,4),(1,3,7,1,3),(1,4,7,1,3),(7)$$
- Der Multigraph ist zusammenhängend

Definition

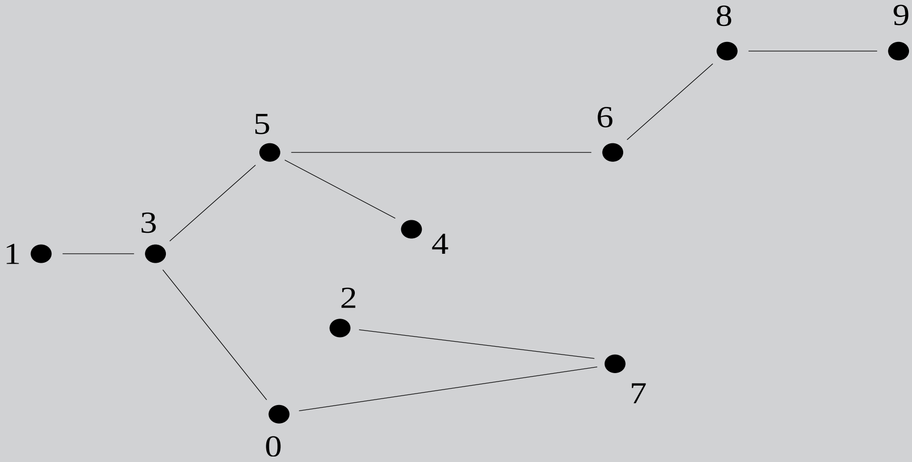
- Ein Wald ist ein zyklenfreier ungerichteter Multigraph
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad $\leqslant 1$ nennt man Blätter

Beispiel

- Im Multigraphen vom ersten Beispiel sind etwa die folgenden Wege von Ecke 0 nach Ecke 3
$$(1,2,6),(1,2,5,6),(1,3),(1,4),(1,3,7,1,3),(1,4,7,1,3),(7)$$
- Der Multigraph ist zusammenhängend
- Einfache Zykel mit Anfangsecke 0 sind etwa
$$(0),(1,2,6,7,(1,3,7),(1,4,7),(7,3,1),(7,4,1),(7,6,2,1)$$

Beispiel

Der folgende Graph ist ein zusammenhängender Wald und somit ein Baum; seine Blätter sind $1, 2, 4, 9$



Satz

Sei G ein ungerichteter Multigraph.

1. *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann aus p durch Weglassen von Kanten ein einfacher Weg von c nach d gewonnen werden*
2. *Jeder einfache geschlossene Weg der Länge mindestens 3 ist ein Zykel*
3. *Aus jedem Zykel kann durch Weglassen von Kanten ein einfacher Zykel erhalten werden.*

Satz

Sei G ein ungerichteter Multigraph.

1. *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann aus p durch Weglassen von Kanten ein einfacher Weg von c nach d gewonnen werden*
2. *Jeder einfache geschlossene Weg der Länge mindestens 3 ist ein Zykel*
3. *Aus jedem Zykel kann durch Weglassen von Kanten ein einfacher Zykel erhalten werden.*

Beweis von (2).

Wir argumentieren indirekt; sei $p = (k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ mit $\ell > 2$ ein einfacher Weg von e nach e, aber kein Zykel. Weil p geschlossen, aber kein Zykel ist, besitzt er zwei gleiche Kanten mit gleichen Eckenmengen. Aber nur die Ecke e kann doppelt sein. Somit müssen diese Kanten erste und letzte Kante des Weges sein und aufeinander folgen; dh. $\ell = 2$. Widerspruch.

Satz

Sei G ein ungerichteter Multigraph.

1. *Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann aus p durch Weglassen von Kanten ein einfacher Weg von c nach d gewonnen werden*
2. *Jeder einfache geschlossene Weg der Länge mindestens 3 ist ein Zykel*
3. *Aus jedem Zykel kann durch Weglassen von Kanten ein einfacher Zykel erhalten werden.*

Beweis von (2).

Wir argumentieren indirekt; sei $p = (k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$ mit $\ell > 2$ ein einfacher Weg von e nach e, aber kein Zykel. Weil p geschlossen, aber kein Zykel ist, besitzt er zwei gleiche Kanten mit gleichen Eckenmengen. Aber nur die Ecke e kann doppelt sein. Somit müssen diese Kanten erste und letzte Kante des Weges sein und aufeinander folgen; dh. $\ell = 2$. Widerspruch. ∎

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Satz

Sei G ein Baum. Dann existiert zu verschiedenen Ecken c und d genau ein einfacher Weg von c nach d.

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Satz

Sei G ein Baum. Dann existiert zu verschiedenen Ecken c und d genau ein einfacher Weg von c nach d.

Beweis.

Wir argumentieren indirekt; G ein Baum und c und d Ecken, sodass nicht genau ein einfacher Weg von c nach d führt

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Satz

Sei G ein Baum. Dann existiert zu verschiedenen Ecken c und d genau ein einfacher Weg von c nach d.

Beweis.

Wir argumentieren indirekt; G ein Baum und c und d Ecken, sodass nicht genau ein einfacher Weg von c nach d führt

Fall 1 Es gibt keinen einfachen Weg von c nach d; dann gibt es aber gar keinen Weg von c nach d. Widerspruch, da G Baum

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Satz

Sei G ein Baum. Dann existiert zu verschiedenen Ecken c und d genau ein einfacher Weg von c nach d.

Beweis.

Wir argumentieren indirekt; G ein Baum und c und d Ecken, sodass nicht genau ein einfacher Weg von c nach d führt

Fall 1 Es gibt keinen einfachen Weg von c nach d; dann gibt es aber gar keinen Weg von c nach d. Widerspruch, da G Baum

Fall 2 Es gibt mindestens zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$

Beweis von Fall 2

- Angenommen $\exists$ zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$
- Wir können annehmen, dass die Wege keine gemeinsamen Kanten haben
- Dann ist die Verkettung eines Weges mit dem reziproken Weg des anderen Weges ein einfacher geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten und somit ein Zykel
- Widerspruch, da G Baum

Beweis von Fall 2

- Angenommen $\exists$ zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$
- Wir können annehmen, dass die Wege keine gemeinsamen Kanten haben
- Dann ist die Verkettung eines Weges mit dem reziproken Weg des anderen Weges ein einfacher geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten und somit ein Zykel
- Widerspruch, da G Baum $\blacksquare$

Beweis von Fall 2

- Angenommen $\exists$ zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$
- Wir können annehmen, dass die Wege keine gemeinsamen Kanten haben
- Dann ist die Verkettung eines Weges mit dem reziproken Weg des anderen Weges ein einfacher geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten und somit ein Zykel
- Widerspruch, da G Baum $\blacksquare$

Definition

- Sei $G = (E, K, q, z)$ ein gerichteter Multigraph
- Man erhält man durch $r(k) := \{q(k), z(k)\}$ für $k \in K$ einen ungerichteten Multigraphen (E, K, r)
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn sein ungerichteter Multigraph zusammenhängend ist

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- Man erhält einen gerichteten Multigraphen G' z.B. wie folgt:
  1. Man dupliziert jede Kante von G und wählt für Original und Kopie jeweils eine andere Richtung
  2. Man wählt für jede Kante k von G eine Richtung aus, dh. man setzt für $r(k) = \{c, d\}$ entweder $q(k) := c$ und $z(k) := d$ oder umgekehrt; dieser gerichtete Multigraph heißt Orientierung von G

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- Man erhält einen gerichteten Multigraphen G' z.B. wie folgt:
  1. Man dupliziert jede Kante von G und wählt für Original und Kopie jeweils eine andere Richtung
  2. Man wählt für jede Kante k von G eine Richtung aus, dh. man setzt für $r(k) = \{c, d\}$ entweder $q(k) := c$ und $z(k) := d$ oder umgekehrt; dieser gerichtete Multigraph heißt Orientierung von G

Satz

1. *Für jeden Wurzelbaum W mit Wurzel w ist der zugehörige ungerichtete Graph B ein Baum mit Ecke w*
2. *Zu jedem nichtleeren Baum B und jeder Ecke e von B gibt es genau einen Wurzelbaum mit Wurzel e, der eine Orientierung von B ist*
3. *Die Zuordnungen $W \mapsto (B, w)$ von 1) und $(B, e) \mapsto W$ von 2) sind zueinander invers. Daher kann man einen Wurzelbaum auch als einen Baum mit einer ausgezeichneten Ecke auffassen.*

Beweis.

1. Offensichtlich ist B zusammenhängend. Wenn B einen Zykel enthält, dann gäbe es in W auch einen Zykel oder zwei verschiedene Kanten mit gleichem Endpunkt und somit zwei verschiedene Wege von der Wurzel zu dieser Ecke.

Beweis.

1. Offensichtlich ist B zusammenhängend. Wenn B einen Zykel enthält, dann gäbe es in W auch einen Zykel oder zwei verschiedene Kanten mit gleichem Endpunkt und somit zwei verschiedene Wege von der Wurzel zu dieser Ecke.
2. Da B zyklenfrei ist, gibt es zu jeder Ecke d ungleich e genau einen einfachen Weg von e nach d. Die dadurch festgelegte Orientierung W ist ein Wurzelbaum mit der Wurzel e.

Beweis.

1. Offensichtlich ist B zusammenhängend. Wenn B einen Zykel enthält, dann gäbe es in W auch einen Zykel oder zwei verschiedene Kanten mit gleichem Endpunkt und somit zwei verschiedene Wege von der Wurzel zu dieser Ecke.
2. Da B zyklenfrei ist, gibt es zu jeder Ecke d ungleich e genau einen einfachen Weg von e nach d. Die dadurch festgelegte Orientierung W ist ein Wurzelbaum mit der Wurzel e.
3. Der ungerichtete Multigraph einer Orientierung ist der ursprüngliche Multigraph. Daher erhält man aus dem Wurzelbaum durch Vergessen der Richtungen den alten Baum zurück. Wenn im neuen Wurzelbaum eine Kante anders orientiert wäre als im alten Wurzelbaum, dann gäbe es im Baum zwei verschiedene einfache Wege von der Wurzel zu einem der Endknoten.

Beweis.

1. Offensichtlich ist B zusammenhängend. Wenn B einen Zykel enthält, dann gäbe es in W auch einen Zykel oder zwei verschiedene Kanten mit gleichem Endpunkt und somit zwei verschiedene Wege von der Wurzel zu dieser Ecke.
2. Da B zyklenfrei ist, gibt es zu jeder Ecke d ungleich e genau einen einfachen Weg von e nach d. Die dadurch festgelegte Orientierung W ist ein Wurzelbaum mit der Wurzel e.
3. Der ungerichtete Multigraph einer Orientierung ist der ursprüngliche Multigraph. Daher erhält man aus dem Wurzelbaum durch Vergessen der Richtungen den alten Baum zurück. Wenn im neuen Wurzelbaum eine Kante anders orientiert wäre als im alten Wurzelbaum, dann gäbe es im Baum zwei verschiedene einfache Wege von der Wurzel zu einem der Endknoten.

$\blacksquare$

Definition

- Sei G ein ungerichteter Multigraph
- Zwei Ecken c und d seien äquivalent, wenn es einen Weg von c nach d gibt
- Die Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten von G
- Offensichtlich kann man in G Schleifen und parallele Kanten entfernen, ohne die Partition in Zusammenhangskomponenten zu verändern

Definition

- Sei G ein ungerichteter Multigraph
- Zwei Ecken c und d seien äquivalent, wenn es einen Weg von c nach d gibt
- Die Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten von G
- Offensichtlich kann man in G Schleifen und parallele Kanten entfernen, ohne die Partition in Zusammenhangskomponenten zu verändern

Satz

Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Multigraph mit mindestens einer Ecke. Dann ist G genau dann ein Baum, wenn er eine Ecke mehr als Kanten hat.

Beweis.

$\Rightarrow$ Sei $G = (E, K, r)$ ein Baum. Man zeigt $\#(E) = \#(K) + 1$ durch Induktion nach $\#(K)$

Beweis.

$\Rightarrow$ Sei $G = (E, K, r)$ ein Baum. Man zeigt $\#(E) = \#(K) + 1$ durch Induktion nach $\#(K)$

$\Leftarrow$ Sei umgekehrt G kein Baum. Dann gibt es einen Zykel, also auch einen einfachen Zykel:

$$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$$

Sei Z die Menge der Ecken des Zykels. Für jede Ecke e in $E \setminus Z$ wählen wir einen Weg minimaler Länge zu einer Ecke aus Z und bezeichnen die erste Kante mit $k(e)$. Dann ist die Abbildung

$$E \setminus Z \to K \setminus \{k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}\}, \; e \mapsto k(e)$$

injektiv (Warum?). Es folgt $\#(E) - \ell \leqslant \#(K) - \ell$ und somit $\#(E) \leqslant \#(K)$ in Widerspruch zur Annahme

Beweis.

- $\Rightarrow$ Sei $G = (E, K, r)$ ein Baum. Man zeigt $\#(E) = \#(K) + 1$ durch Induktion nach $\#(K)$
- $\Leftarrow$ Sei umgekehrt G kein Baum. Dann gibt es einen Zykel, also auch einen einfachen Zykel:

$$(k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1})$$

Sei Z die Menge der Ecken des Zykels. Für jede Ecke e in $E \setminus Z$ wählen wir einen Weg minimaler Länge zu einer Ecke aus Z und bezeichnen die erste Kante mit $k(e)$. Dann ist die Abbildung

$$E \setminus Z \to K \setminus \{k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}\}, \, e \mapsto k(e)$$

injektiv (Warum?). Es folgt $\#(E) - \ell \leqslant \#(K) - \ell$ und somit $\#(E) \leqslant \#(K)$ in Widerspruch zur Annahme

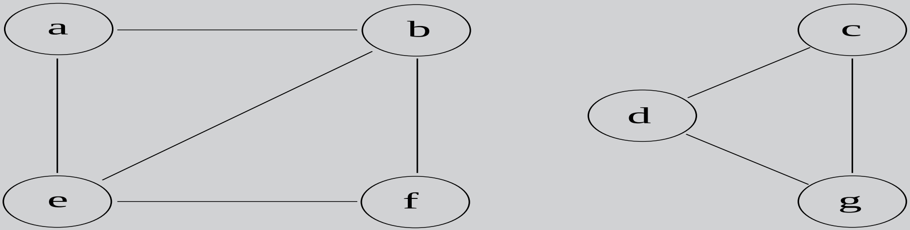
$\blacksquare$

Definition

- Sei G ein ungerichteter Multigraph
- Ein Teilgraph G' von G heißt ein spannender Wald von G, wenn
  1. G' ein Wald ist und
  2. die Partitionen in Zusammenhangskomponenten von G bzw. G' übereinstimmen.
- Dann gilt $E' = E$

Beispiel

Für den folgenden Graphen gibt es $8 \cdot 3 = 24$ spannende Wälder



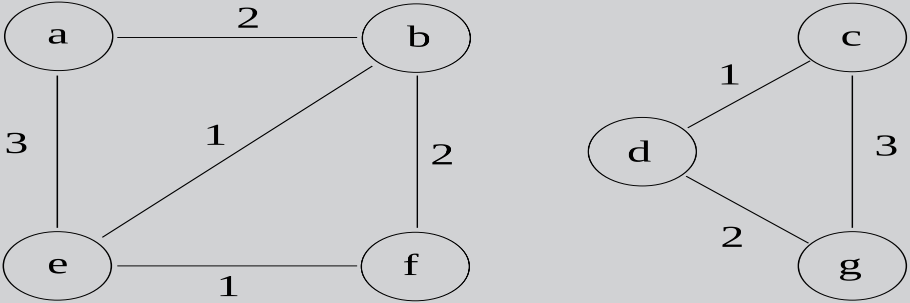
Satz (Algorithmus von Kruskal)

1. *Sei* $G = (E, K, r)$ *ein ungerichteter Multigraph mit Kantenbewertung* b
2. *Gesucht ist Partition von* E *in Zusammenhangskomponenten sowie die Kantenmenge* W *eines spannenden Waldes von* G *mit minimaler Bewertung* $\sum_{k \in W} b(k)$
3. *Als Vorbereitung werden in* G *alle Schleifen entfernt, parallele Kanten bis auf jene mit kleinster Bewertung gestrichen, und die verbleibenden Kanten sortiert, sodass* $b(k_0) \leqslant b(k_1) \leqslant \ldots \leqslant b(k_{m-1})$
4. *Der eigentliche Algorithmus operiert dann mit* $\mathrm{O}(\#(E) \cdot \#(K))$ *Operationen wie folgt*

> *Setze* $W = \varnothing$ *und* $P = \{\{e\} \mid e \in E\}$
> *Für* i *von* 0 *bis* $m - 1$ *wiederhole:*
>   *Falls die Ecken* e *und* d *von* k_i *in verschiedenen Blöcken von* P*,*
>   *vereinige die beiden Blöcke von* P *und erweitere* W *um* k_i

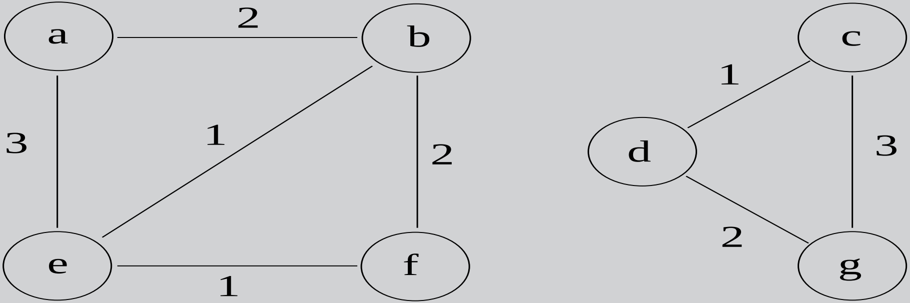
Beispiel

Für den bewerteten Graphen



Beispiel

Für den bewerteten Graphen



startet der Algorithmus von Kruskal mit $W = \emptyset$; $P = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$ und endet mit

$$W = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, g\}, \{e, f\}\}$$
$$P = \{\{a, b, e, f\}, \{c, d, g\}\}$$

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i
- Menge W ist zunächst leer und wird im Schritt i um eine etwaige Verbindungskante erweitert, deren Ecken dann im Vereinigungsblock liegen

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i
- Menge W ist zunächst leer und wird im Schritt i um eine etwaige Verbindungskante erweitert, deren Ecken dann im Vereinigungsblock liegen
- Für jeden Block B ist der Teilgraph mit Eckenmenge B und den entsprechenden Kanten aus W ein Baum

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i
- Menge W ist zunächst leer und wird im Schritt i um eine etwaige Verbindungskante erweitert, deren Ecken dann im Vereinigungsblock liegen
- Für jeden Block B ist der Teilgraph mit Eckenmenge B und den entsprechenden Kanten aus W ein Baum
- Somit ist nach Schritt i der Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge W ein spannender Wald von G_i

Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, , \ldots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i
- Menge W ist zunächst leer und wird im Schritt i um eine etwaige Verbindungskante erweitert, deren Ecken dann im Vereinigungsblock liegen
- Für jeden Block B ist der Teilgraph mit Eckenmenge B und den entsprechenden Kanten aus W ein Baum
- Somit ist nach Schritt i der Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge W ein spannender Wald von G_i
- Nun zeigen wir, dass die verwendete Greedy-Strategie einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung liefert

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p, die eine Endecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geqslant b(k_i)$

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p, die eine Endecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geqslant b(k_i)$
- Der neue Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $N := (M \setminus \{k_j\}) \cup \{k_i\}$ ist ein spannender Wald, weil jeder Weg über k_j auch über k_i und die restlichen Kanten von p geführt werden kann und umgekehrt; außerdem hat N ebenfalls eine minimale Bewertung

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p, die eine Endecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geqslant b(k_i)$
- Der neue Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $N := (M \setminus \{k_j\}) \cup \{k_i\}$ ist ein spannender Wald, weil jeder Weg über k_j auch über k_i und die restlichen Kanten von p geführt werden kann und umgekehrt; außerdem hat N ebenfalls eine minimale Bewertung
- durch endlich viele Austäusche erhält man also die Kantenmenge W aus M

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p, die eine Endecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geqslant b(k_i)$
- Der neue Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $N := (M \setminus \{k_j\}) \cup \{k_i\}$ ist ein spannender Wald, weil jeder Weg über k_j auch über k_i und die restlichen Kanten von p geführt werden kann und umgekehrt; außerdem hat N ebenfalls eine minimale Bewertung
- durch endlich viele Austäusche erhält man also die Kantenmenge W aus M
- Weil M eine minimale Kantenbewertung hat, so auch W

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W, die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p, die eine Endecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geqslant b(k_i)$
- Der neue Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $N := (M \setminus \{k_j\}) \cup \{k_i\}$ ist ein spannender Wald, weil jeder Weg über k_j auch über k_i und die restlichen Kanten von p geführt werden kann und umgekehrt; außerdem hat N ebenfalls eine minimale Bewertung
- durch endlich viele Austäusche erhält man also die Kantenmenge W aus M
- Weil M eine minimale Kantenbewertung hat, so auch W $\blacksquare$