



Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch David Obwaller
Burak Ekici Vincent van Oostrom
Johannes Koch Oleksandra Panasiuk
Georg Moser

cbr.uibk.ac.at

Motivation

Vincent presented

motivating examples (on blackboard)
koenigsberg bridges (euler's proof)
travelling salesman (hamiltonian paths)
4-colour theorem
euler's formula $V+E-F = 2$
kuratowski planarity K_5 $K_{3,3}$
state spaces
divide-and-conquer (merge-sort $n \log n$)
successor-relation

2

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition (Gerichteter Multigraph)

Ein **gerichteter Multigraph** G ist gegeben durch

- eine **Eckenmenge** oder **Knotenmenge** E
- eine **Kantenmenge** K
- Abbildungen $q: K \rightarrow E$, $z: K \rightarrow E$; **Anfangsecke** $q(k)$ und **Endecke** $z(k)$
- k heißt Kante von $q(k)$ nach $z(k)$

Definition

- Ein **gerichteter Graph** ist ein gerichteter Multigraph ohne parallele Kanten
- Zu jedem Eckenpaar (c, d) gibt es höchstens eine Kante $k \in K$ mit $q(k) = c$ und $z(k) = d$
- Statt Kante k schreibt man das Eckenpaar (c, d)

1

Inhalte der Lehrveranstaltung

Beweismethoden

deduktive Beweise, Beweise von Mengeninklusionen, Kontraposition, Widerspruchsbeweise, vollständige Induktion, wohlfundierte Induktion, strukturelle Induktion, Gegenbeispiele

Relationen, Ordnungen und Funktionen

Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Wörter, asymptotisches Wachstum

Graphentheorie

gerichtete Graphen, **ungerichtete Graphen**

Zähl- und Zahlentheorie

Aufzählen und Nummerieren von Objekten Lösen von Rekursionsformeln, Mastertheorem, Rechnen mit ganzen Zahlen, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, Restklassen

3

Definition (ungerichteter Multigraph)

Ein **ungerichteter Multigraph** ist gegeben durch

- eine **Eckenmenge** (oder **Knotenmenge**) E
- eine **Kantenmenge** K
- eine Abbildung $r: K \rightarrow \{\{c, d\} \mid c, d \in E\}$ mit $k \mapsto r(k)$, die jeder Kante k eine Menge $r(k)$ mit einer oder zwei **Endecken** zuordnet
- k ist Kante zwischen diesen Ecken

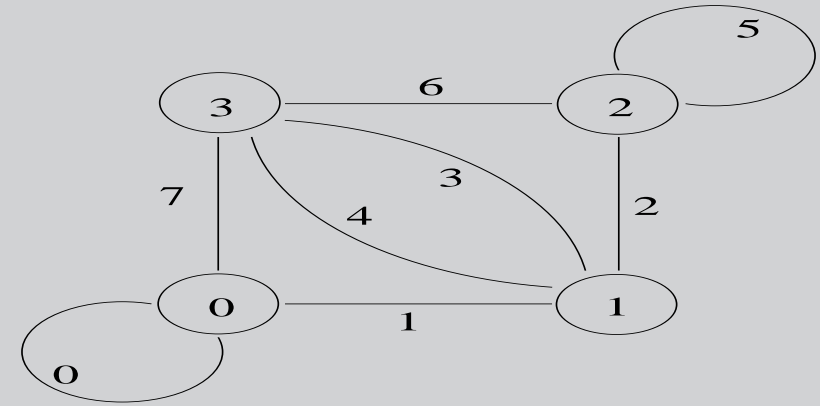
Beispiel

Sei $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $K = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ und der Abbildung r wie folgt

k	$r(k)$	k	$r(k)$
0	{0}	4	{1, 3}
1	{0, 1}	5	{2}
2	{1, 2}	6	{2, 3}
3	{1, 3}	7	{0, 3}

4

Beispiel (Fortsetzung)



5

Definition

- Ecke c heißt **Nachbar** der Ecke d , wenn es eine Kante zwischen c und d gibt
- Eine Kante mit nur einer Endecke heißt **Schleife**
- Kanten mit den gleichen Endecken heißen **parallel**
- Für eine Ecke e heißt die Zahl der Kanten mit Endecke e der **Grad** von e
- Gegeben Abbildungen $a: E \rightarrow M$, $b: K \rightarrow N$; dann heißt Multigraph **ecken-** bzw. **kantenbeschriftet**
- Sei $M = \mathbb{R}$ bzw. $N = \mathbb{R}$, dann **ecken-** bzw. **kantenbewertet**

Definition (ungerichteter Graph)

Ein **ungerichteter Graph** ist ein ungerichteter Multigraph ohne parallele Kanten; dann gibt es zu jeder Eckenmenge $\{c, d\}$ höchstens eine Kante $k \in K$ mit $r(k) = \{c, d\}$

6

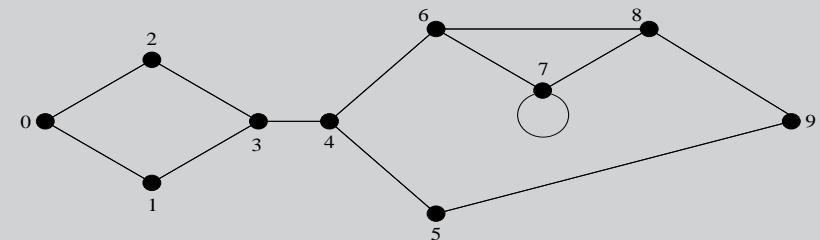
Beispiel

- Eine **symmetrische Relation** S auf einer Menge M kann durch den ungerichteten Graphen mit

- 1 der Eckenmenge M
- 2 der Kantenmenge $\{\{x, y\} \mid (x, y) \in S\}$
- 3 der Abbildung $r(\{x, y\}) = \{x, y\}$

visualisiert werden

- Jeder ungerichtete Graph ist der Graph einer symmetrischen Relation



- Wir geben die Kantenmenge oft durch ihren Rand (= Endecken) an

7

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- $G' = (E', K', r')$ heißt **Teilmultigraph** von G , wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $r'(k) = r(k)$ für alle $k \in K'$
- Ein **Teilgraph** ist ein **Teilmultigraph**, der selbst Graph ist

Definition

Sei (E, K, r) ein ungerichteter Multigraph, und seien c, d Ecken

- Ein Tupel $(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1}) \in K^\ell$ heißt ein **Weg** von c nach d der Länge ℓ , wenn es Ecken e_0, e_1, \dots, e_ℓ gibt mit $e_0 = c$, $e_\ell = d$, und $r(k_i) = \{e_i, e_{i+1}\}$ für $i = 0, 1, \dots, \ell - 1$
- e_0 die **Anfangsecke**; e_ℓ die **Endecke**
- $e_1, e_2, \dots, e_{\ell-1}$ die **Zwischenecken**
- Für jede Ecke $e \in E$ ist das leere Tupel $() \in K^0$ der **leere Weg** mit **Anfangsecke** e und **Endecke** e

8

Definition (Fortsetzung)

- Der **ungerichtete** Multigraph heißt **zusammenhängend**, wenn es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg gibt
- Ein Weg heißt **einfach**, wenn er nichtleer ist und die Ecke paarweise verschieden (Ausnahme $e_0 = e_\ell$)
- Für jeden Weg $(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-2}, k_{\ell-1})$ von c nach d ist der **reziproke** Weg $(k_{\ell-1}, k_{\ell-2}, \dots, k_1, k_0)$ ein Weg von d nach c
- Die Verkettung der Wege $(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1})$ (von c nach d) und $(h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$ (von d nach e) ist ein Weg

$$(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1}, h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$$

von c nach e

- Ein Weg heißt **geschlossen**, wenn Anfangs- und Endecke gleich sind
- Ein nichtleerer geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten wird ein **Zykel** genannt; **ungerichtete** Multigraphen ohne Zyklen heißen **zyklenfrei**

9

Definition

- Ein **Wald** ist ein zyklensfreier ungerichteter Multigraph
- Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald
- Ecken eines Waldes vom Grad ≤ 1 nennt man **Blätter**

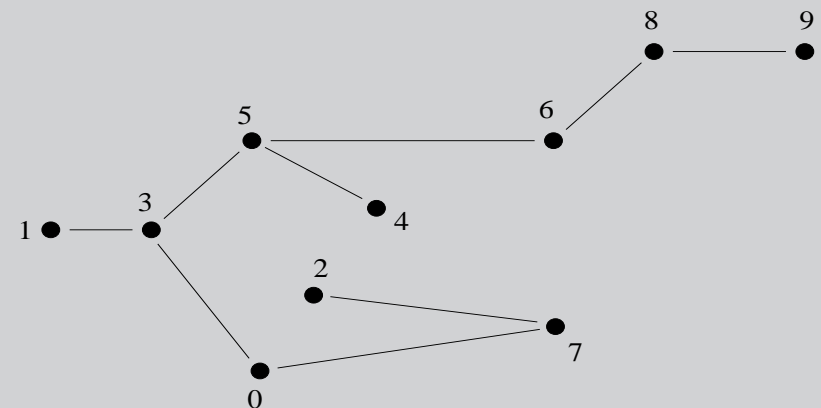
Beispiel

- Im Multigraphen vom ersten Beispiel sind etwa die folgenden Wege von Ecke 0 nach Ecke 3
 $(1, 2, 6), (1, 2, 5, 6), (1, 3), (1, 4), (1, 3, 7, 1, 3), (1, 4, 7, 1, 3), (7)$
- Der Multigraph ist zusammenhängend
- Einfache Zykel mit Anfangsecke 0 sind etwa
 $(0), (1, 2, 6, 7, (1, 3, 7), (1, 4, 7), (7, 3, 1), (7, 4, 1), (7, 6, 2, 1)$

10

Beispiel

Der folgende Graph ist ein zusammenhängender Wald und somit ein Baum; seine Blätter sind 1, 2, 4, 9



11

Satz

Sei G ein ungerichteter Multigraph.

- 1 Wenn es einen nichtleeren Weg p von der Ecke c zur Ecke d gibt, dann kann aus p durch Weglassen von Kanten ein einfacher Weg von c nach d gewonnen werden
- 2 Jeder einfache geschlossene Weg der Länge mindestens 3 ist ein Zykel
- 3 Aus jedem Zykel kann durch Weglassen von Kanten ein einfacher Zykel erhalten werden.

Beweis von (2).

Wir argumentieren indirekt; sei $p = (k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1})$ mit $\ell > 2$ ein einfacher Weg von e nach e , aber kein Zykel. Weil p geschlossen, aber kein Zykel ist, besitzt er zwei gleiche Kanten mit gleichen Eckenmengen. Aber nur die Ecke e kann doppelt sein. Somit müssen diese Kanten erste und letzte Kante des Weges sein und aufeinander folgen; dh. $\ell = 2$. Widerspruch. ■

12

Beweis von Fall 2

- Angenommen \exists zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$
- Wir können annehmen, dass die Wege keine gemeinsamen Kanten haben
- Dann ist die Verkettung eines Weges mit dem reziproken Weg des anderen Weges ein einfacher geschlossener Weg mit paarweise verschiedenen Kanten und somit ein Zykel
- Widerspruch, da G Baum ■

Definition

- Sei $G = (E, K, q, z)$ ein gerichteter Multigraph
- Man erhält man durch $r(k) := \{q(k), z(k)\}$ für $k \in K$ einen ungerichteten Multigraphen (E, K, r)
- G heißt **schwach zusammenhängend**, wenn sein ungerichteter Multigraph zusammenhängend ist

14

Beispiel

In einem ungerichteten Multigraphen kann es Zyklen der Länge 2 geben, in einem ungerichteten Graphen nicht.

Satz

Sei G ein Baum. Dann existiert zu verschiedenen Ecken c und d genau ein einfacher Weg von c nach d .

Beweis.

Wir argumentieren indirekt; G ein Baum und c und d Ecken, sodass nicht genau ein einfacher Weg von c nach d führt

- Fall 1** Es gibt keinen einfachen Weg von c nach d ; dann gibt es aber gar keinen Weg von c nach d . Widerspruch, da G Baum
- Fall 2** Es gibt mindestens zwei einfache Wege p und q von c nach d mit $p \neq q$

13

Definition

- Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph
- Man erhält einen gerichteten Multigraphen G' z.B. wie folgt:
 - 1 Man dupliziert jede Kante von G und wählt für Original und Kopie jeweils eine andere Richtung
 - 2 Man wählt für jede Kante k von G eine Richtung aus, dh. man setzt für $r(k) = \{c, d\}$ entweder $q(k) := c$ und $z(k) := d$ oder umgekehrt; dieser gerichtete Multigraph heißt **Orientierung** von G

Satz

- 1 Für jeden Wurzelbaum W mit Wurzel w ist der zugehörige ungerichtete Graph B ein Baum mit Ecke w
- 2 Zu jedem nichtleeren Baum B und jeder Ecke e von B gibt es genau einen Wurzelbaum mit Wurzel e , der eine Orientierung von B ist
- 3 Die Zuordnungen $W \mapsto (B, w)$ von 1) und $(B, e) \mapsto W$ von 2) sind zueinander invers. Daher kann man einen Wurzelbaum auch als einen Baum mit einer ausgezeichneten Ecke auffassen.

15

Beweis.

- 1 Offensichtlich ist B zusammenhängend. Wenn B einen Zykel enthält, dann gäbe es in W auch einen Zykel oder zwei verschiedene Kanten mit gleichem Endpunkt und somit zwei verschiedene Wege von der Wurzel zu dieser Ecke.
- 2 Da B zyklensfrei ist, gibt es zu jeder Ecke d ungleich e genau einen einfachen Weg von e nach d . Die dadurch festgelegte Orientierung W ist ein Wurzelbaum mit der Wurzel e .
- 3 Der ungerichtete Multigraph einer Orientierung ist der ursprüngliche Multigraph. Daher erhält man aus dem Wurzelbaum durch Vergessen der Richtungen den alten Baum zurück. Wenn im neuen Wurzelbaum eine Kante anders orientiert wäre als im alten Wurzelbaum, dann gäbe es im Baum zwei verschiedene einfache Wege von der Wurzel zu einem der Endknoten.

16

Definition

- Sei G ein ungerichteter Multigraph
- Zwei Ecken c und d seien äquivalent, wenn es einen Weg von c nach d gibt
- Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten** von G
- Offensichtlich kann man in G Schleifen und parallele Kanten entfernen, ohne die Partition in Zusammenhangskomponenten zu verändern

Satz

Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Multigraph mit mindestens einer Ecke. Dann ist G genau dann ein Baum, wenn er eine Ecke mehr als Kanten hat.

17

Beweis.

- ⇒ Sei $G = (E, K, r)$ ein Baum. Man zeigt $\#(E) = \#(K) + 1$ durch Induktion nach $\#(K)$
- ⇐ Sei umgekehrt G kein Baum. Dann gibt es einen Zykel, also auch einen einfachen Zykel:

$$(k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1})$$

Sei Z die Menge der Ecken des Zyklus. Für jede Ecke e in $E \setminus Z$ wählen wir einen Weg minimaler Länge zu einer Ecke aus Z und bezeichnen die erste Kante mit $k(e)$. Dann ist die Abbildung

$$E \setminus Z \rightarrow K \setminus \{k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1}\}, e \mapsto k(e)$$

injektiv (Warum?). Es folgt $\#(E) - \ell \leq \#(K) - \ell$ und somit $\#(E) \leq \#(K)$ in Widerspruch zur Annahme

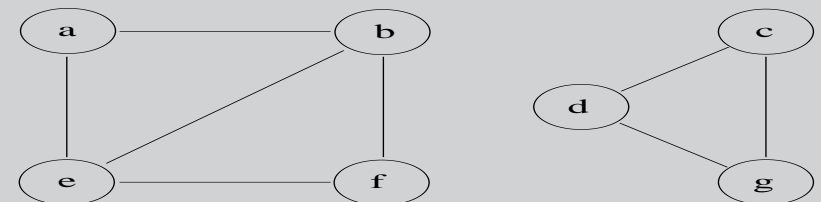
18

Definition

- Sei G ein ungerichteter Multigraph
- Ein Teilgraph G' von G heißt ein **spannender Wald** von G , wenn
 - 1 G' ein Wald ist und
 - 2 die Partitionen in Zusammenhangskomponenten von G bzw. G' übereinstimmen.
- Dann gilt $E' = E$

Beispiel

Für den folgenden Graphen gibt es $8 \cdot 3 = 24$ spannende Wälder



19

Satz (Algorithmus von Kruskal)

- 1 Sei $G = (E, K, r)$ ein ungerichteter Multigraph mit Kantenbewertung b
- 2 Gesucht ist Partition von E in Zusammenhangskomponenten sowie die Kantenmenge W eines spannenden Waldes von G mit minimaler Bewertung $\sum_{k \in W} b(k)$
- 3 Als Vorbereitung werden in G alle Schleifen entfernt, parallele Kanten bis auf jene mit kleinster Bewertung gestrichen, und die verbleibenden Kanten sortiert, sodass $b(k_0) \leq b(k_1) \leq \dots \leq b(k_{m-1})$
- 4 Der eigentliche Algorithmus operiert dann mit $O(\#(E) \cdot \#(K))$ Operationen wie folgt

Setze $W = \emptyset$ und $P = \{\{e\} \mid e \in E\}$

Für i von 0 bis $m - 1$ wiederhole:

Falls die Ecken e und d von k_i in verschiedenen Blöcken von P , vereinige die beiden Blöcke von P und erweitere W um k_i

20

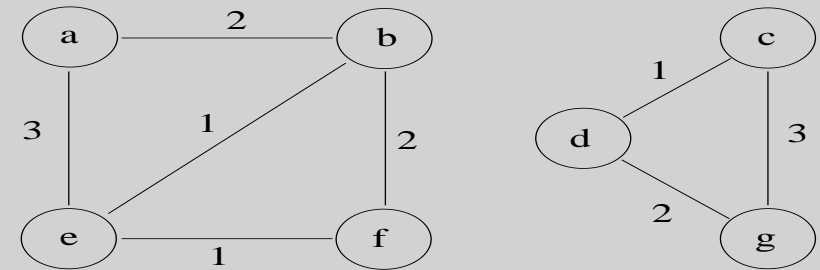
Beweis.

- Sei G_i der Teilgraph von G mit Eckenmenge E und Kantenmenge $\{k_0, k_1, \dots, k_i\}$
- Der Algorithmus startet mit der Partition in einzelne Ecken und vereinigt anschließend Blöcke mit Verbindungskante
- Nach Schritt i ist P die Partition in Zusammenhangskomponenten von G_i
- Menge W ist zunächst leer und wird im Schritt i um eine etwaige Verbindungskante erweitert, deren Ecken dann im Vereinigungsblock liegen
- Für jeden Block B ist der Teilgraph mit Eckenmenge B und den entsprechenden Kanten aus W ein Baum
- Somit ist nach Schritt i der Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge W ein spannender Wald von G_i
- Nun zeigen wir, dass die verwendete Greedy-Strategie einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung liefert

22

Beispiel

Für den bewerteten Graphen



startet der Algorithmus von Kruskal mit $W = \emptyset$; $P = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$ und endet mit

$W = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, g\}, \{e, f\}\}$

$P = \{\{a, b, e, f\}, \{c, d, g\}\}$

21

Beweis (Fortsetzung).

- Sei M die Kantenmenge eines spannenden Waldes mit minimaler Bewertung; also angenommen $M \neq W$; dann existiert eine Kante k_i in W , die nicht in M liegt
- Seien e_1, e_2 die Ecken von k_i und E_1, E_2 die zugehörigen Blöcke im Algorithmus
- Da es einen Weg p von e_1 nach e_2 aus Kanten in M gibt, existiert eine Kante k_j im Weg p , die eine Ecke in E_1 und die andere außerhalb von E_1 hat. Somit gilt $j > i$ und $b(k_j) \geq b(k_i)$
- Der neue Teilgraph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $N := (M \setminus \{k_j\}) \cup \{k_i\}$ ist ein spannender Wald, weil jeder Weg über k_j auch über k_i und die restlichen Kanten von p geführt werden kann und umgekehrt; außerdem hat N ebenfalls eine minimale Bewertung
- durch endlich viele Austausche erhält man also die Kantenmenge W aus M
- Weil M eine minimale Kantenbewertung hat, so auch W

23