



Diskrete Mathematik

Ralph Bottesch

David Obwaller

Burak Ekici

Vincent van Oostrom

Johannes Koch

Oleksandra Panasiuk

Georg Moser

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition

Eine natürliche Zahl p heißt **Primzahl**, wenn $p \notin \{0, 1\}$ und p nur die trivialen Teiler besitzt.

Satz

*Jede ganze Zahl größer als 1 kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Diese Primzahlen heißen **Primfaktoren** der Zahl und sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Satz (der kleine Satz von Fermat)

Sei p eine Primzahl und sei a eine ganze Zahl, die nicht von p geteilt wird. Dann gilt

$$a^{p-1} \equiv_p 1.$$

Inhalte der Lehrveranstaltung (cont'd)

Reguläre Sprachen

deterministische Automaten, nichtdeterministische Automaten, endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen, reguläre Ausdrücke, Abgeschlossenheit, Schleifenlemma

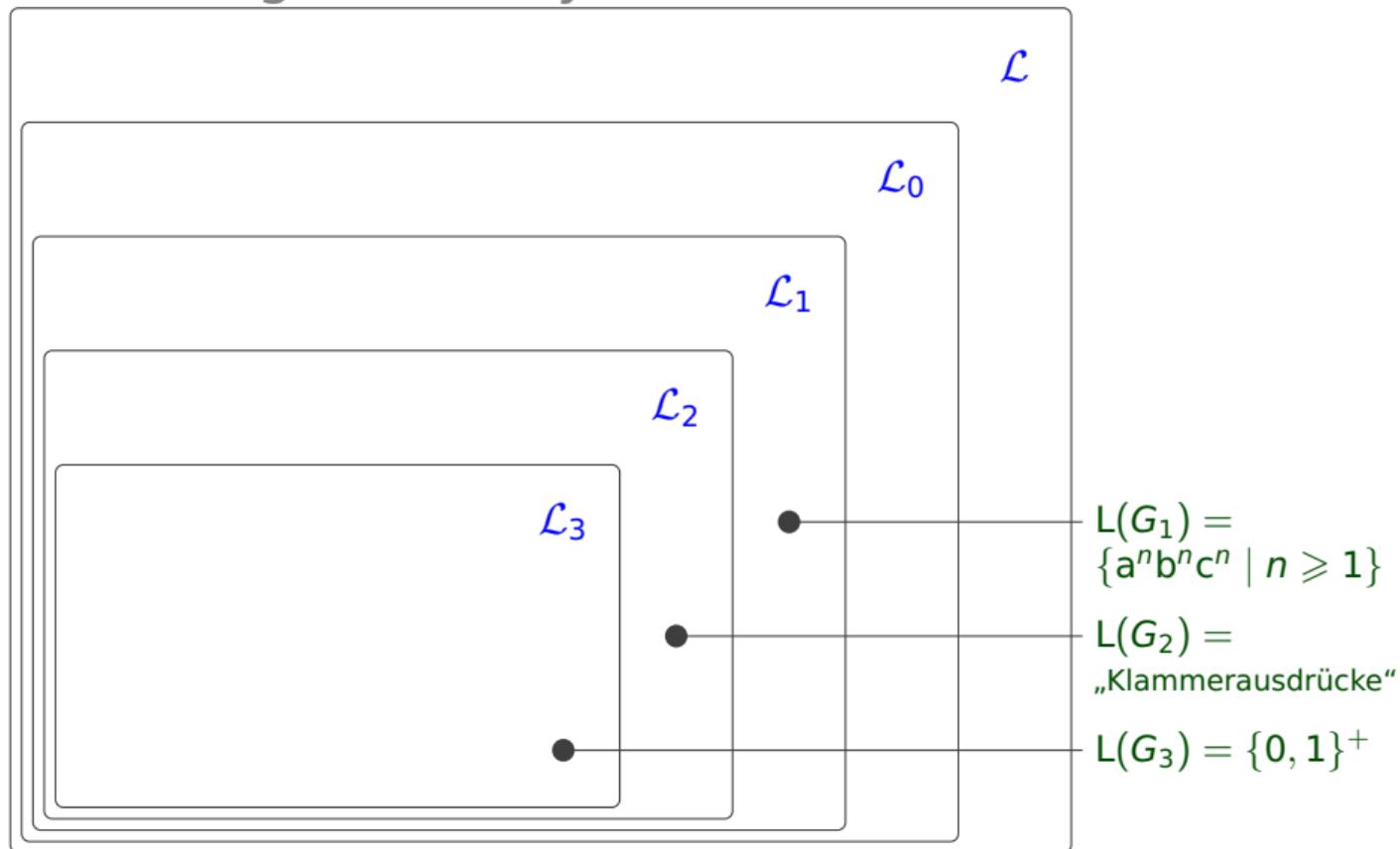
Berechenbarkeitstheorie

deterministische TM, nichtdeterministische TM, universelle TMs, Äquivalenzen

Komplexitätstheorie

Grundlagen, die Klassen P und NP, polynomielle Reduktionen, logspace Reduktionen

Zur Erinnerung: Chomsky-Hierarchie



Reguläre Sprachen

Anwendungen von regulären Sprachen

- Software zum Entwurf und Testen von **digitalen Schaltkreisen**
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der **lexikalischen Analyse**:
 - 1 **lexikalische Scanner** („**Lexer**“) wird mit endlichen Automaten implementiert
 - 2 Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum **Durchsuchen** umfangreicher Texte
- Software zur **Verifizierung** aller Arten von Systemen, die eine endliche Anzahl verschiedener Zustände besitzen
- Softwarebausteine eines Computerspiels:
 - 1 **Kontrolle von Spielfiguren** kann mit Hilfe eines endlichen Automaten implementiert werden
 - 2 erlaubt eine bessere Modularisierung des Codes

Deterministische endliche Automaten (kurz DEAs)

Beispiel

Alle endlichen Sprachen sind regulär.

Deterministische endliche Automaten (kurz DEAs)

Beispiel

Alle endlichen Sprachen sind regulär.

Definition

Ein DEA ist gegeben durch ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass

- 1 Q eine endliche Menge von Zuständen
- 2 Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
- 3 $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die Übergangsfunktion
- 4 $s \in Q$ der Startzustand
- 5 $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

Deterministische endliche Automaten (kurz DEAs)

Beispiel

Alle endlichen Sprachen sind regulär.

Definition

Ein DEA ist gegeben durch ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass

- 1 Q eine endliche Menge von Zuständen
- 2 Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
- 3 $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die Übergangsfunktion
- 4 $s \in Q$ der Startzustand
- 5 $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

Zu beachten: δ muss für alle möglichen Argumente definiert sein

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$	\dots
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	\dots
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$		
\vdots	\vdots		

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$	\dots
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	\dots
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$		
\vdots	\vdots		

Zustandsgraph

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA, der (gerichtete) **Zustandsgraph** mit Startzustand s und akzeptierenden Zuständen F ist wie folgt definiert:

- 1 die Zustände sind die Ecken
- 2 die Kanten K sind

$$(p, q) \quad p, q \in Q \text{ und } \exists a \in \Sigma \text{ mit } \delta(p, a) = q$$

- 3 die Kantenbeschriftung $b: K \rightarrow \Sigma$ ist definiert als

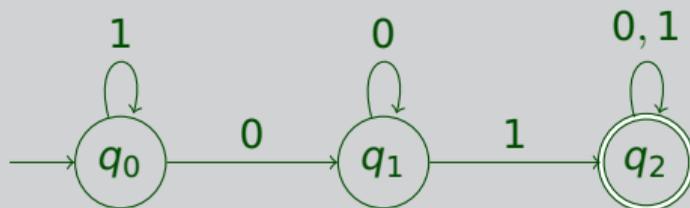
$$(p, q) \mapsto a \quad \text{wenn } \delta(p, a) = q$$

Beispiel

Der DEA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit Zustandstabelle

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
$*q_2$	q_2	q_2

besitzt den folgenden Zustandsgraphen:



Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die **erweiterte Übergangsfunktion** $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &:= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &:= \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\end{aligned}$$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die **erweiterte Übergangsfunktion** $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &:= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &:= \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\end{aligned}$$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die **Sprache** $L(A)$ von A :

$$L(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die **erweiterte Übergangsfunktion** $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &:= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &:= \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\end{aligned}$$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die **Sprache** $L(A)$ von A :

$$L(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Satz (Erinnerung)

Sei A ein DEA, dann ist $L(A)$ regulär und umgekehrt existiert zu jeder regulären Sprache L ein DEA A , sodass $L = L(A)$

Beispiel

Für den obigen DEA A gilt $\hat{\delta}(q_0, 0010) = q_2$

Wir berechnen $\hat{\delta}(q_0, 0010)$ rekursiv wie folgt:

- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 001), 0) = \delta(q_2, 0) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 00), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 0) = \delta(q_1, 0) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1$

Beispiel

Für den obigen DEA A gilt $\hat{\delta}(q_0, 0010) = q_2$

Wir berechnen $\hat{\delta}(q_0, 0010)$ rekursiv wie folgt:

- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 001), 0) = \delta(q_2, 0) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 00), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 0) = \delta(q_1, 0) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1$

Beispiel

Für DEA A gilt $L(A) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^*\}$. Die Sprache $L(A)$ beschreibt die Menge aller Wörter, in welchen eine 1 direkt auf eine 0 folgt

Beispiel

Für den obigen DEA A gilt $\hat{\delta}(q_0, 0010) = q_2$

Wir berechnen $\hat{\delta}(q_0, 0010)$ rekursiv wie folgt:

- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 001), 0) = \delta(q_2, 0) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 00), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 0) = \delta(q_1, 0) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1$

Beispiel

Für DEA A gilt $L(A) = \{x01y \mid x, y \in \Sigma^*\}$. Die Sprache $L(A)$ beschreibt die Menge aller Wörter, in welchen eine 1 direkt auf eine 0 folgt

Definition (alternativ)

Eine formale Sprache L heißt **regulär**, wenn \exists DEA A , sodass $L(A) = L$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; dann heißt der DEA $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ der **erreichbare Anteil** von A , wobei

- $Q' = \{q \in Q \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ mit } \hat{\delta}(s, x) = q\}$,
- $\delta': Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ mit $\delta'(q, a) := \delta(q, a)$ für alle $q \in Q'$ und $a \in \Sigma$
- $F' = F \cap Q'$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; dann heißt der DEA $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ der **erreichbare Anteil** von A , wobei

- $Q' = \{q \in Q \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ mit } \hat{\delta}(s, x) = q\}$,
- $\delta': Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ mit $\delta'(q, a) := \delta(q, a)$ für alle $q \in Q'$ und $a \in \Sigma$
- $F' = F \cap Q'$

Satz

Sei A ein DEA und A' der erreichbare Anteil von A , dann $L(A) = L(A')$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; dann heißt der DEA $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ der **erreichbare Anteil** von A , wobei

- $Q' = \{q \in Q \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ mit } \hat{\delta}(s, x) = q\}$,
- $\delta': Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ mit $\delta'(q, a) := \delta(q, a)$ für alle $q \in Q'$ und $a \in \Sigma$
- $F' = F \cap Q'$

Satz

Sei A ein DEA und A' der erreichbare Anteil von A , dann $L(A) = L(A')$

Beweisskizze.

- δ' ist wohldefiniert und $s \in Q'$ und $F' \subseteq Q'$ per Definition
- also $(Q', \Sigma, \delta', s, F')$ ein DEA
- somit $L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(s, x) \in F\} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}'(s, x) \in F'\} = L(A')$

Beobachtung

Erreichbare Zustände können mittels Nachfolgersuche berechnet werden

Beobachtung

Erreichbare Zustände können mittels Nachfolgersuche berechnet werden

Definition (Nachfolgersuche für DEA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

Setze $S := \{s\}$ und markiere s

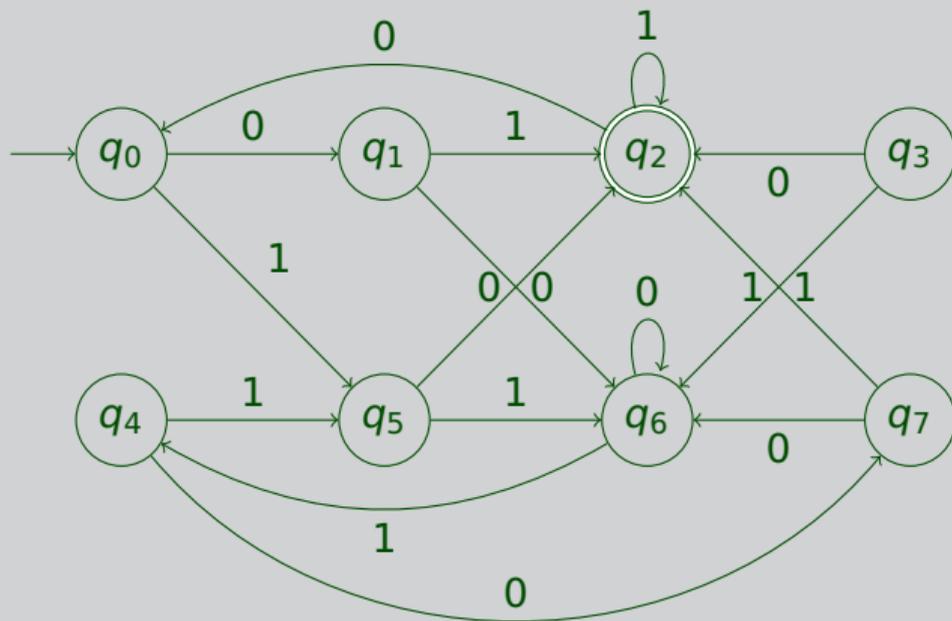
Solange S nichtleer ist, wiederhole:

Wähle eine Ecke e in S und entferne sie aus S

Bestimme alle unmarkierten unmittelbaren Nachfolger von e
markiere sie und gebe sie zu S dazu

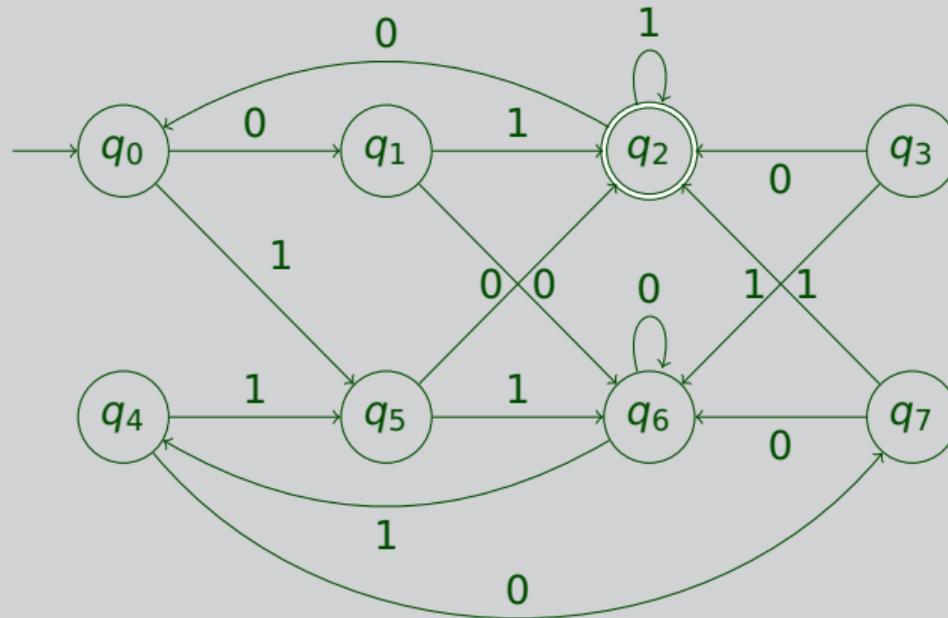
Beispiel

Sei DEA B gegeben durch den Zustandsgraphen:



Beispiel

Sei DEA B gegeben durch den Zustandsgraphen:



Erreichbarer Anteil erhält man durch Weglassen von q_3

Definition

Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ heißen **äquivalent**, wenn für jedes Wort $x \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(p, x) \in F$ genau dann, wenn $\hat{\delta}(q, x) \in F$

Definition

Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ heißen **äquivalent**, wenn für jedes Wort $x \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(p, x) \in F$ genau dann, wenn $\hat{\delta}(q, x) \in F$

Beispiel (cont'd)

- Die Wörter ϵ , 0 , und 1 sind nicht geeignet die Zustände q_0 und q_6 als nicht äquivalent festzustellen
- Aber $\hat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$ und $\hat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$; also sind q_0 und q_6 nicht äquivalent

Definition

Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ heißen **äquivalent**, wenn für jedes Wort $x \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(p, x) \in F$ genau dann, wenn $\hat{\delta}(q, x) \in F$

Beispiel (cont'd)

- Die Wörter ϵ , 0 , und 1 sind nicht geeignet die Zustände q_0 und q_6 als nicht äquivalent festzustellen
- Aber $\hat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$ und $\hat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$; also sind q_0 und q_6 nicht äquivalent

Satz

Äquivalenz von Zuständen ist eine Äquivalenzrelation

Beweis.

Mittels Lemma 2.11

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände u und v sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = u$ und $\delta(q, a) = v$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände u und v sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = u$ und $\delta(q, a) = v$

Satz

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA und seien $p, q \in Q$. Dann sind p und q äquivalent, gdw sie nicht unterscheidbar sind

Beweis.

- \Rightarrow : wenn p und q äquivalent, dann sind sie nicht unterscheidbar
- \Leftarrow : wenn p und q nicht unterscheidbar, dann sind sie äquivalent

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände u und v sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = u$ und $\delta(q, a) = v$

Satz

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA und seien $p, q \in Q$. Dann sind p und q äquivalent, gdw sie nicht unterscheidbar sind

Beweis.

- \Rightarrow : wenn p und q unterscheidbar sind, sind sie nicht äquivalent
- \Leftarrow : wenn p und q nicht unterscheidbar, dann sind sie äquivalent

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände u und v sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = u$ und $\delta(q, a) = v$

Satz

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA und seien $p, q \in Q$. Dann sind p und q äquivalent, gdw sie nicht unterscheidbar sind

Beweis.

- \Rightarrow : wenn p und q unterscheidbar sind, sind sie nicht äquivalent
- \Leftarrow : sind Zustände p, q nicht äquivalent, dann sind sie unterscheidbar

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA; zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände u und v sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = u$ und $\delta(q, a) = v$

Satz

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA und seien $p, q \in Q$. Dann sind p und q äquivalent, gdw sie nicht unterscheidbar sind

Beweis.

- \Rightarrow : wenn p und q unterscheidbar sind, sind sie nicht äquivalent
- \Leftarrow : sind Zustände p, q nicht äquivalent, dann sind sie unterscheidbar

wir zeigen \Leftarrow , die andere Richtung folgt leicht (siehe Skriptum)

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1 wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$

Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1 wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$
Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.
- 2 strukturelle Induktion nach w

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1** wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$
Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.
- 2** strukturelle Induktion nach w
- 3** Basis $w = \epsilon$, dann sind p, q unterscheidbar nach Definition

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1 wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$
Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.
- 2 strukturelle Induktion nach w
- 3 Basis $w = \epsilon$, dann sind p, q unterscheidbar nach Definition
- 4 Schritt $w = ax$, mit $r = \delta(p, a)$, $s = \delta(q, a)$

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1 wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$
Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.
- 2 strukturelle Induktion nach w
- 3 Basis $w = \epsilon$, dann sind p, q unterscheidbar nach Definition
- 4 Schritt $w = ax$, mit $r = \delta(p, a)$, $s = \delta(q, a)$
- 5 nach Voraussetzung gilt

$$\hat{\delta}(r, x) \in F \quad \hat{\delta}(s, x) \notin F$$

mit IH sind r und s unterscheidbar

Beweis von \Leftarrow .

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1 wir zeigen für alle $p, q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$
Wenn $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, dann sind p, q unterscheidbar.
- 2 strukturelle Induktion nach w
- 3 Basis $w = \epsilon$, dann sind p, q unterscheidbar nach Definition
- 4 Schritt $w = ax$, mit $r = \delta(p, a)$, $s = \delta(q, a)$
- 5 nach Voraussetzung gilt

$$\hat{\delta}(r, x) \in F \quad \hat{\delta}(s, x) \notin F$$

mit IH sind r und s unterscheidbar

- 6 dann sind aber auch p, q unterscheidbar

Definition (Erinnerung)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände r und s sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = r$ und $\delta(q, a) = s$

Definition (Erinnerung)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände r und s sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = r$ und $\delta(q, a) = s$

Definition (Markierungsalgorithmus)

- 1 wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$

Definition (Erinnerung)

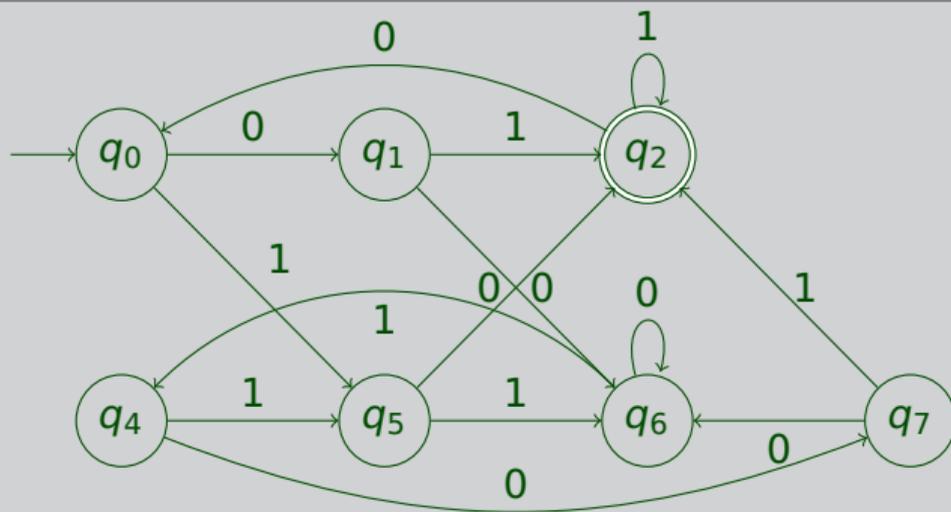
Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Zwei Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$ sind **unterscheidbar**,

- 1 wenn $p \in F$ genau dann, wenn $q \notin F$ oder
- 2 wenn es unterscheidbare Zustände r und s sowie ein $a \in \Sigma$ gibt, sodass $\delta(p, a) = r$ und $\delta(q, a) = s$

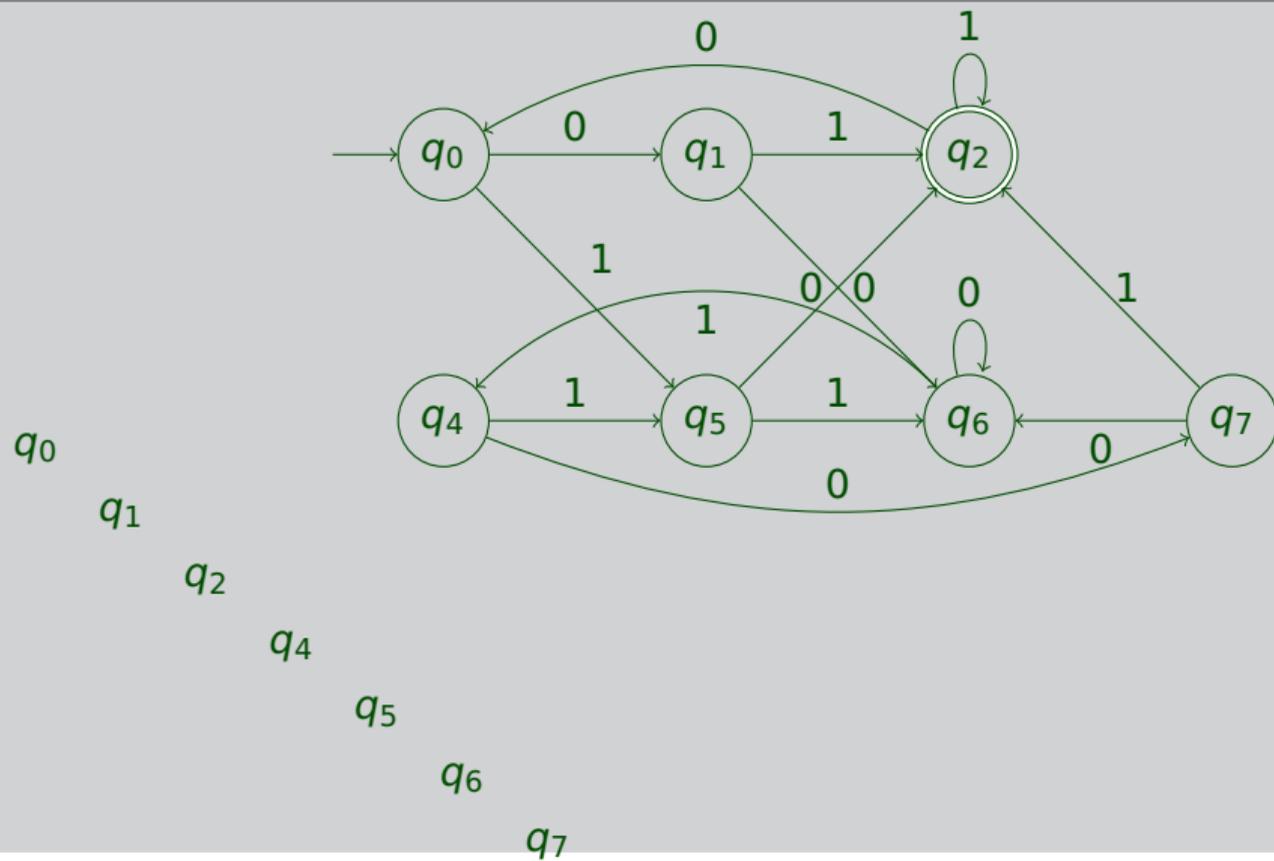
Definition (Markierungsalgorithmus)

- 1 wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$
- 2 sei a ein Eingabezeichen und
 - sei $\delta(p, a) = r, \delta(q, a) = s$
 - sodass $\{r, s\}$ markiertdann markiere $\{p, q\}$

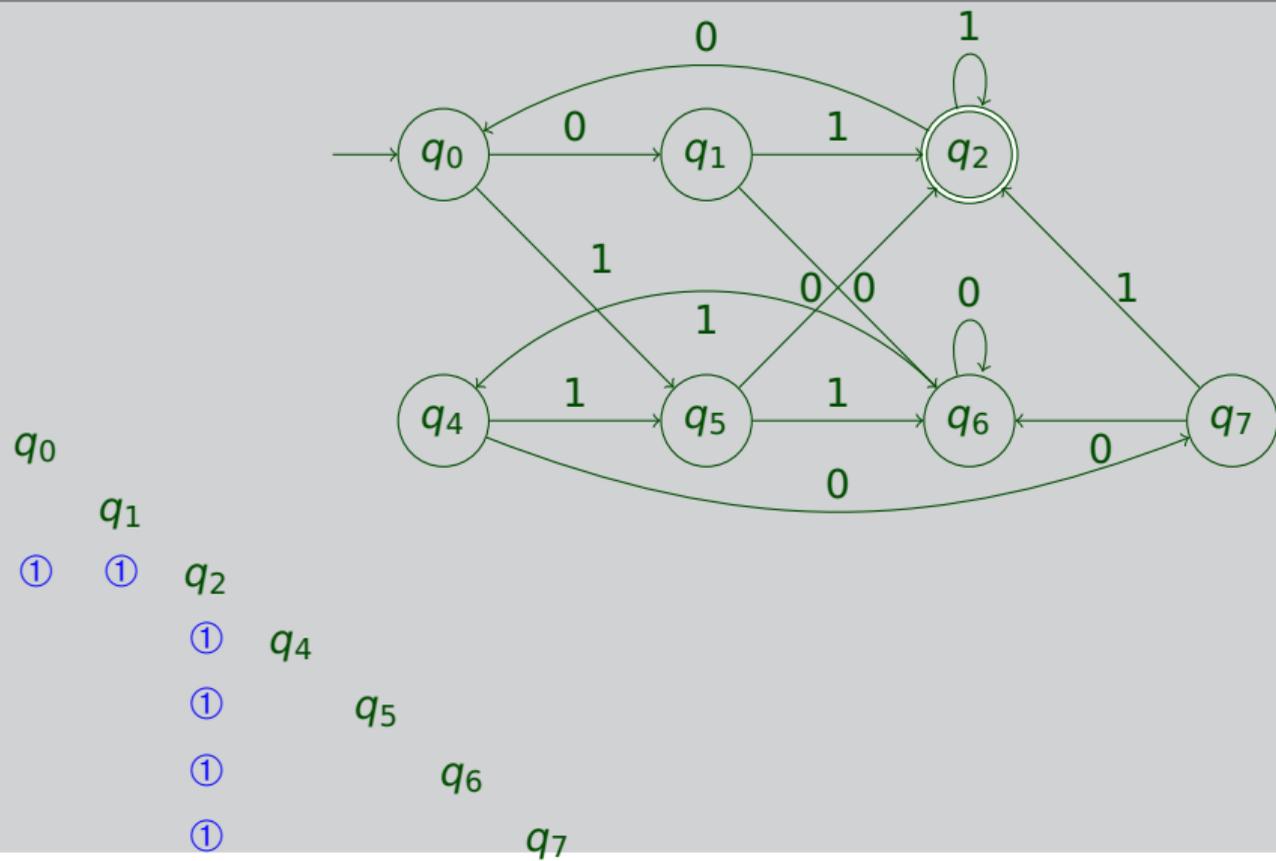
Beispiel (cont'd)



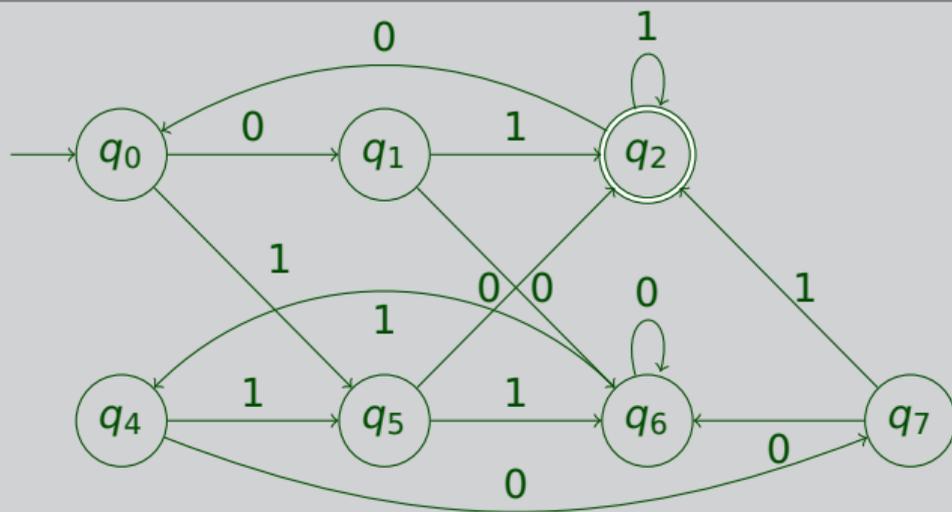
Beispiel (cont'd)



Beispiel (cont'd)



Beispiel (cont'd)



q_0

② q_1

① ① q_2

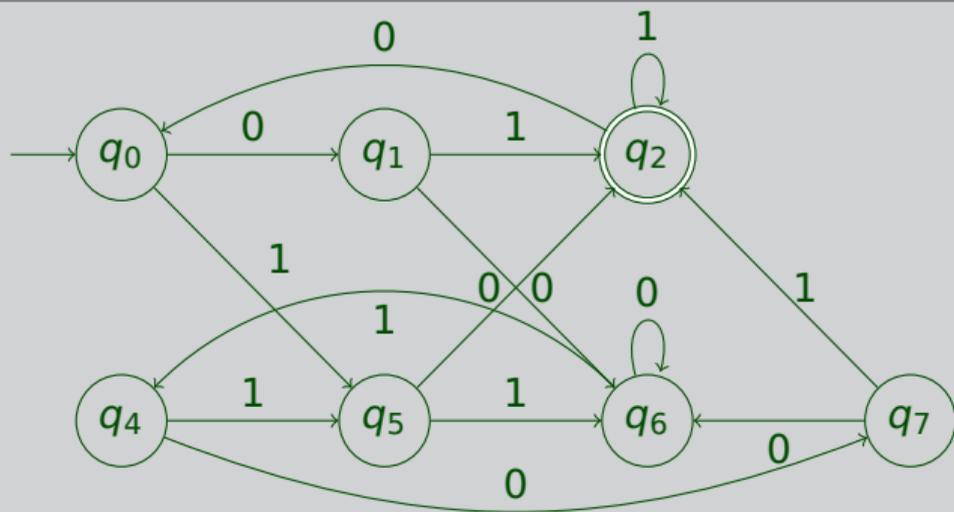
① q_4

① q_5

① q_6

① q_7

Beispiel (cont'd)



q_0

②

q_1

①

①

q_2

①

q_4

①

② q_5

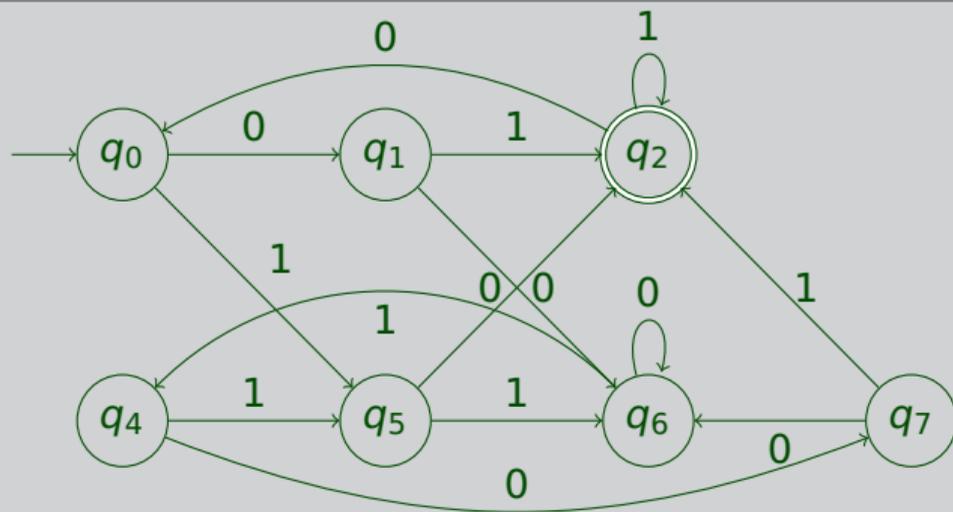
①

q_6

①

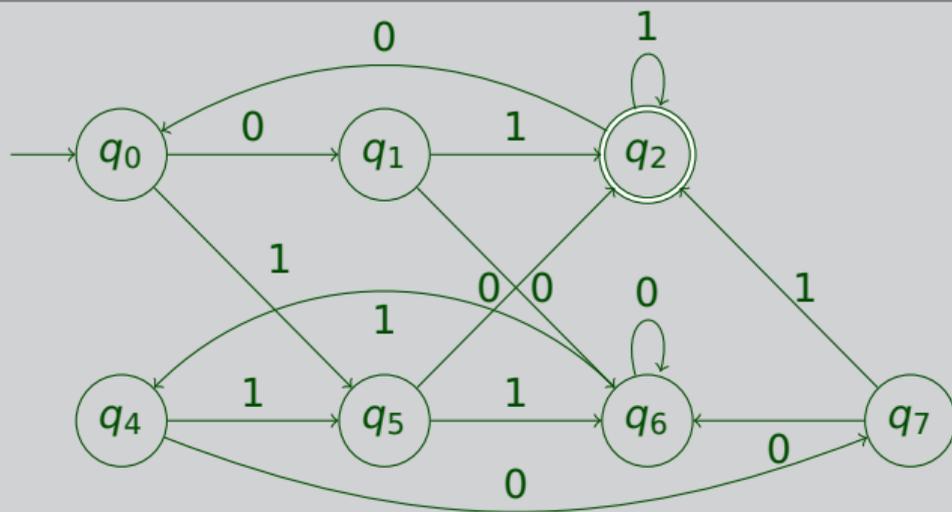
q_7

Beispiel (cont'd)



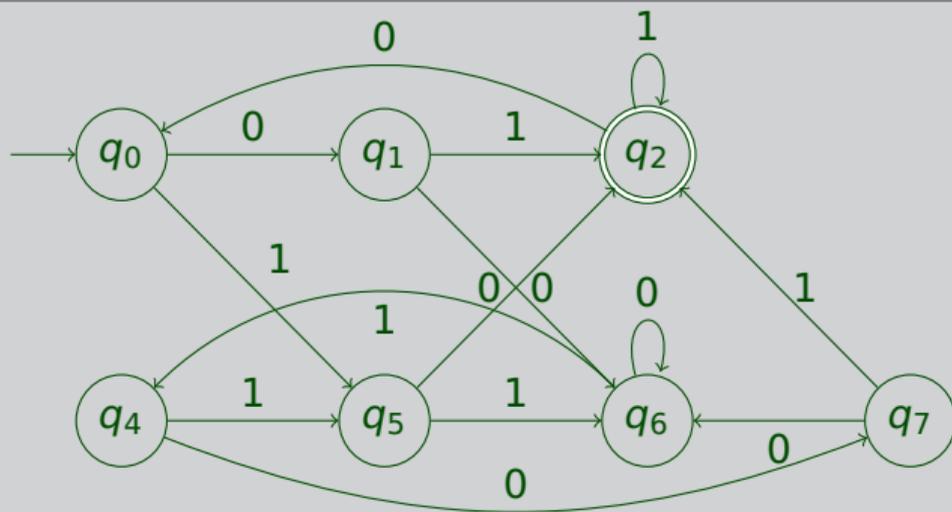
q_0
 ② q_1
 ① ① q_2
 ② ① q_4
 ② ② ① ② q_5
 ② ① ② q_6
 ② ① ② ② ② q_7

Beispiel (cont'd)



q_0
 ② q_1
 ① ① q_2
 ② ① q_4
 ② ② ① ② q_5
 ③ ② ① ③ ② q_6
 ② ① ② ② ② q_7

Beispiel (cont'd)



q_0						
②	q_1					
①	①	q_2				
	②	①	q_4			
②	②	①	②	q_5		
③	②	①	③	②	q_6	
②		①	②	②	②	q_7

Markierungsalgorithmus liefert die folgenden Zustandsblöcke:

$\{q_0, q_4\}, \{q_1, q_7\}, \{q_5\}, \{q_2\}, \{q_6\}$

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'
- 3 Konstruiere den minimalen DEA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
 - Q_B sind die Äquivalenzklassen von Q' ,
 - $\delta_B([q], a) := [p]$ wenn $\delta'(q, a) = p$ für $a \in \Sigma$ und $q \in Q'$,
 - der Startzustand ist $s_B := [s]$,
 - die akzeptierenden Zustände sind $F_B = \{[f] \mid f \in F'\}$.

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'
- 3 Konstruiere den minimalen DEA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
 - Q_B sind die Äquivalenzklassen von Q' ,
 - $\delta_B([q], a) := [p]$ wenn $\delta'(q, a) = p$ für $a \in \Sigma$ und $q \in Q'$,
 - der Startzustand ist $s_B := [s]$,
 - die akzeptierenden Zustände sind $F_B = \{[f] \mid f \in F'\}$.

Satz

Sei A ein DEA und B der minimierte DEA:

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'
- 3 Konstruiere den minimalen DEA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
 - Q_B sind die Äquivalenzklassen von Q' ,
 - $\delta_B([q], a) := [p]$ wenn $\delta'(q, a) = p$ für $a \in \Sigma$ und $q \in Q'$,
 - der Startzustand ist $s_B := [s]$,
 - die akzeptierenden Zustände sind $F_B = \{[f] \mid f \in F'\}$.

Satz

Sei A ein DEA und B der minimierte DEA:

- 1 $L(A) = L(B)$

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'
- 3 Konstruiere den minimalen DEA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
 - Q_B sind die Äquivalenzklassen von Q' ,
 - $\delta_B([q], a) := [p]$ wenn $\delta'(q, a) = p$ für $a \in \Sigma$ und $q \in Q'$,
 - der Startzustand ist $s_B := [s]$,
 - die akzeptierenden Zustände sind $F_B = \{[f] \mid f \in F'\}$.

Satz

Sei A ein DEA und B der minimierte DEA:

- 1 $L(A) = L(B)$
- 2 *DEA B ist minimal*

Definition (Minimierungsalgorithmus)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA

- 1 Bestimme den erreichbaren Anteil $A' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ von A
- 2 Bestimme die äquivalenten Zustände von A'
- 3 Konstruiere den minimalen DEA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
 - Q_B sind die Äquivalenzklassen von Q' ,
 - $\delta_B([q], a) := [p]$ wenn $\delta'(q, a) = p$ für $a \in \Sigma$ und $q \in Q'$,
 - der Startzustand ist $s_B := [s]$,
 - die akzeptierenden Zustände sind $F_B = \{[f] \mid f \in F'\}$.

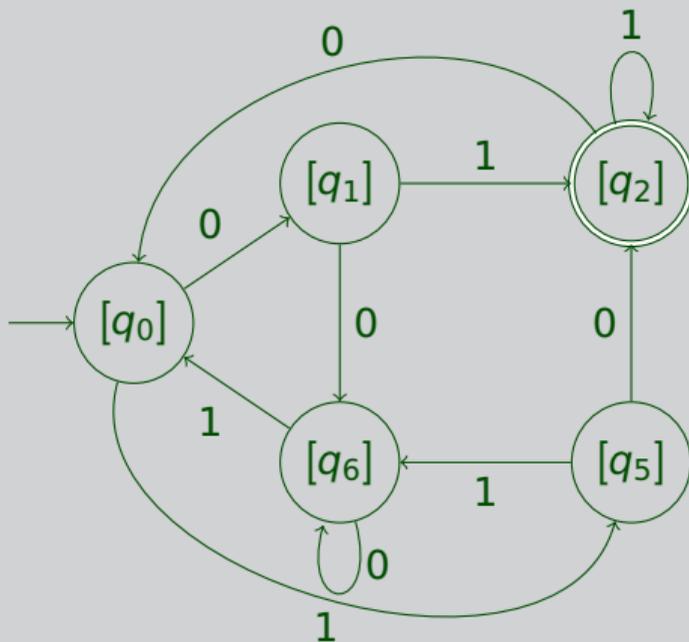
Satz

Sei A ein DEA und B der minimierte DEA:

- 1 $L(A) = L(B)$
- 2 DEA B ist minimal
- 3 der minimale DEA eindeutig bis auf Umbenennung der Zustände

Beispiel

Minimierung des DEA B : Zustand q_3 ist in A von q_0 aus nicht erreichbar;
Zusammenfassen der äquivalenten Zustände des erreichbaren Anteils liefert einen minimalen Automaten



Definition

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, sodass

- Q eine endliche Menge von **Zustände**
- Σ eine endliche Menge, das **Eingabealphabet**; dessen Elemente **Eingabezeichen** genannt werden,
- die **Zustandsübergangsfunktion**

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

gibt an wie sich der Zustand des Automaten bei einer Eingabe ändern kann

- $S \subseteq Q$, deren Elemente **Startzustände** genannt werden,
- $F \subseteq Q$, deren Elemente **akzeptierende Zustände** genannt werden

Beispiel

Gegeben der NEA N durch die Zustandstabelle

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Beispiel

Gegeben der NEA N durch die Zustandstabelle

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NEA; dann heißt $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ die **erweiterte Übergangsfunktion** und ist wie folgt definiert:

Beispiel

Gegeben der NEA N durch die Zustandstabelle

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NEA; dann heißt $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ die **erweiterte Übergangsfunktion** und ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{1} \quad \hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \quad \text{für alle } q \in Q$$

Beispiel

Gegeben der NEA N durch die Zustandstabelle

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NEA; dann heißt $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ die **erweiterte Übergangsfunktion** und ist wie folgt definiert:

- 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\}$ für alle $q \in Q$
- 2 $\hat{\delta}(q, xa) := \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p, a)$ für alle $q \in Q, x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$

Beispiel

Wir berechnen $\hat{\delta}(q_0, 00101)$ für NEA N , schrittweise

- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$

Beispiel

Wir berechnen $\hat{\delta}(q_0, 00101)$ für NEA N , schrittweise

- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$

Definition

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NEA; dann wird

$$L(N) := \{x \in \Sigma^* \mid \text{es gibt einen Zustand } s \in S, \text{ sodass } \hat{\delta}(s, x) \cap F \neq \emptyset\}.$$

als die **von N akzeptierte Sprache** bezeichnet