1) Wie sind die Begriffe *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Differenz* definiert und wie prüft man ob zwei Mengen gleich sind?

   Prüfen Sie nach, ob für beliebige Mengen A, B und C die folgenden Aussagen allgemein gültig sind:

   a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2) Seien A, B und C Aussagen. Sind die Aussagen

$$(A \wedge B) \to C \quad \text{und} \quad A \wedge (B \to C)$$

   äquivalent?

3) Zeigen Sie mittels indirektem Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (siehe Kapitel 1.2.4 im Skriptum).

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ existieren und betrachten Sie das Produkt $p_1 p_2 \ldots p_n$.

4) Was sind *zusammengesetzte Aussagen* und wie wird ihr *Wahrheitsgehalt* berechnet?

   Über zwei Glühbirnen B1 und B2, die durch zwei Schalter S1 und S2 kontrolliert werden, ist Folgendes bekannt:

   - Leuchtet mindestens eine Glühbirne, so muss mindestens ein Schalter eingeschaltet sein.
   - Leuchtet B1 nicht, dann ist S2 ausgeschaltet.
   - Wenn S1 ein-, S2 aber ausgeschaltet ist, leuchtet B2.
   - Wenn S2 eingeschaltet und S1 ausgeschaltet ist, leuchtet B2 nicht.

   Welche Informationen können wir über die beiden Schalter gewinnen wenn

   a) beide Glühbirnen leuchten,

   b) nur B1 leuchtet,

   c) nur B2 leuchtet,

   d) weder B1 noch B2 leuchtet?

   Hinweis: Formulieren Sie die Bedingungen als aussagenlogische Formeln und stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf.

5) Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung und seien A und B Teilmengen von M. Wir definieren $f(A) := \{f(x) \mid x \in A \subseteq M\}$.

   a) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,.$$

   b) Widerlegen Sie die allgemeine Gültigkeit von:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\,.$$

c) Beweisen Sie:

Wenn f injektiv ist, dann gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.