1) Aufgabe 10.1

2) Zeige, dass $\leqslant^P$ eine transitive Relation über Sprachen ist. Das heißt, wenn $L_1 \leqslant^P L_2$ und $L_2 \leqslant^P L_3$ gelten, dann muss $L_1 \leqslant^P L_3$ folgen.

3) Nehmen Sie an A sei ein Array von Zahlen und nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass alle Zahlen in A verschieden sind und die Länge von A ungerade ist. Wir schreiben $\mathsf{median}(A)$ für den *Median* von A, die Zahl $m \in A$, sodass die Hälfte der Zahlen $A \setminus \{m\}$ kleiner als m und die andere größer. Zum Beispiel, $\mathsf{median}([16, 3, 7, 1, 77, 15, 1001])$ ist 15, da von den übrigen sechs Zahlen $1, 3, 7$ kleiner sind und $16, 77, 1001$ größer.

   - Zeigen Sie, dass das Problem den Median von A zu finden auf das Problem der Sortierung von A reduziert werden kann mit einem entsprechenden Algorithmus. (Entweder auf Papier oder in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.)
   - Argumentieren Sie dass *durch* die Reduktion im oberen Punkt, das Problem zur Findung eines Medians eine Zeitkomplexität von $O(n \log n)$ hat, wo n die Länge von A ist. *Hinweis*: Vgl. Beispiel 6.35
   - Argumentieren Sie umgekehrt, dass *durch* die gegebene Reduktion und dadurch, dass das Finden eines Medians in $\Omega(n)$ möglich ist, das gleich für Sortieralgorithmen gefolgert werden kann.

   Hinweis: Der erste bekannt Median-Algorithmus mit linearer Zeit war median-of-medians.

4) Bei dem *Knotenüberdeckungsproblem* wird ein Graph $G = (E, K)$ und eine natürliche Zahl k gegeben und gefragt, ob es eine Teilmenge $U \subseteq E$ gibt, mit $|U| \leq k$, so dass jede Kante von G mindestens ein Eck in U hat (anders: ob alle Kanten des Graphen mit höchstens k Ecken überdeckt werden können).

   Bei dem *Stabilitätsproblem* wird ebenfalls ein Graph G und eine natürliche Zahl k gegeben und gefragt, ob es eine Menge von mindestens k Ecken in G gibt, die jeweils paarweise durch keine Kante verbunden sind. (Eine solche Teilenge von Ecken heißt *stabil* oder *unabhängig*).

   Formal haben wir:

$$\textsc{Vertex Cover} = \{(G, k) \mid \exists U \subseteq E : |U| \leq k \wedge \forall c \in K, c \cap U \neq \emptyset\},$$

$$\textsc{Independent Set} = \{(G, k) \mid \exists U \subseteq E : |U| \geq k \wedge \forall v_1, v_2 \in U, \{v_1, v_2\} \notin K\}.$$

   Zeigen Sie, dass die beiden Probleme in NP sind, indem Sie:

   a) einen polytime Verifikator für Vertex Cover beschreiben und
   b) eine NTM beschreiben, die Independent Set in polynomieller Zeit entscheidet.

5) Zeigen Sie, dass die Probleme Vertex Cover und Independent Set *äquivalent* sind im Sinne der Reduktionen in polynomieller Zeit, d.h. es gibt eine polynomielle Reduktion von Vertex Cover nach Independent Set, und umgekehrt. Das bedeutet, dass eines der Probleme genau dann NP-vollständig ist, wenn dasselbe auch für das andere gilt. (Tatsächlich sind beide NP-vollständige Probleme.)

Hinweis: Zeigen Sie, dass $U \subseteq E$ genau dann eine Knotenüberdeckung von K ist, wenn $E \setminus U$ unabhängig ist.