1) Beweisen Sie, dass $n^2 < 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt.

2) Sei $R := \{(m, n) \mid (m \bmod 5) = (n \bmod 5)\}$ eine Relation auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen von R? Geben Sie für jede Äquivalenzklasse zwei verschiedene Repräsentanten an. Geben Sie zwei verschiedene Repräsentantensysteme von R an. Induziert R eine Partition von $\mathbb{N}$?

   Hinweis: Die Operation „mod" wird in Definition 7.20 im Skriptum eingeführt.

3) Bestimmen Sie minimale, maximale, kleinste sowie größte Elemente der partiellen Ordnung R, R ist wie folgt definiert:

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (a, g), (b, b), (b, d), (b, f), (b, g), (c, c), (c, g), (d, d), (d, g), (e, e), (e, g), (f, f), (f, g), (g, g)\}$$

   über der Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

4) Eine Relation R auf M hat die *Spiegel*-Eigenschaft wenn:

   Für alle $x, y \in M$, $x = y$ genau dann, wenn ein $z \in M$ existiert mit $x \mathrel{R} z$ und $z \mathrel{R} y$.

   Zeigen Sie:

   a) Die Relation $R := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ besitzt die Spiegel-Eigenschaft;
   b) Wenn R die Spiegel-Eigenschaft besitzt, dann ist R symmetrisch;
   c) Es gibt symmetrische Relationen die die Spiegel-Eigenschaft nicht besitzen.

5) Sei Σ ein (nicht leeres) Alphabet und seien $w = (w_0, ..., w_{n-1})$ in Σ^n und $v = (v_0, ..., v_{m-1})$ in Σ^m Wörter über Σ. Wir sagen w ist eine *Subsequenz* von v, wenn es $0 \leq i_0 < ... < i_{n-1} < m$ gibt, sodass für alle $0 \leq k < n$ gilt $w_k = v_{i_k}$. Wir sagen w ist ein Teilwort von v, falls zusätzlich $i_{k+1} = i_k + 1$ für alle $0 \leq k < n - 1$ gilt.

   Zum Beispiel, für $\Sigma = \{a, b, c\}$, ist ac eine Subsequenz von abc (durch $(0, 2)$) weil $(ac)_0 = a = (abc)_0$ und $(ac)_1 = c = (abc)_2$, aber kein Teilwort. Ein weiteres Beispiel wäre ab (durch (0,1)) und bc (durch (1,2)) sind beides Teilwörter und Subsequenzen von abc, aber cb und ca sind keines von beidem.

   a) Ist die Relation der Subsequenz eine partielle Ordnung über alle Wörter aus Σ? Beweisen Sie Ihre Antwort.
   b) Ist die Relation der Teilworte eine partielle Ordnung über alle Wörter aus Σ? Beweisen Sie Ihre Antwort.
   c) Wenn w eine Subsequenz von v und v ein Teilwort von u ist, ist w dann eine Subsequenz von u?
   d) Gegeben ist das Wort $w_0 =$ *Unendlichkeit* für das Deutsche Alphabet Σ. Wie lang ist die längste Sequenz von Wörtern w_0, w_1, w_2, $\ldots$, so dass w_{i+1} ein (wahres) Teilwort von w_i für alle i ist?