1) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $a < b$.

   a) Wieviele Wörter $w$ gibt es mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} a$ gilt? Wieviele mit $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} b$? Mit $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} a$? Mit $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} b$?

   b) Zeigen Sie, dass wenn $w, v \in \Sigma^*$ zwei Wörter sind, $w <_{\text{lex}} v$ und $\ell(w) = \ell(v)$ gelten, es ein Wort $u \in \Sigma^*$ gibt, für das $w <_{\text{lex}} u <_{\text{lex}} v$ gilt.

2) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$: $n! \leq n^n$

3) Sei $P$ die formale Sprache der Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$. Zeigen Sie die Aussage

   „Wenn $x \in P$ und $\ell(x)$ gerade, dann hat $x$ eine gerade Anzahl von $a$s.“

   mittels wohlfundierter Induktion.

   *Hinweis*: Wählen Sie die wohlfundierte Ordnung $\leq$ derart, dass es nur einen Basisfall gibt.

4) Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a + b = b + a$.

   Beachten Sie, dass $\mathbb{N}$ zwei Konstruktoren hat: 0 und die Nachfolger-Funktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   $$\mathbb{N} := 0 \mid S\ \mathbb{N}$$

   Die Funktion $add : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (auch als $+$ geschrieben) ist wie folgt rekursiv definiert:

   $$\begin{aligned} add\ 0\ b &= b \\ add\ (S\ m)\ b &= S\ (add\ m\ b). \end{aligned}$$

   *Hinweis*: Verwenden Sie das übliche Schema für strukturelle Induktion über natürliche Zahlen:

   $$\forall P, P\,0 \wedge (\forall n, P\,n \to P\,(S\,n)) \to \forall n, P\,n.$$

5) Betrachten Sie die quaternären Zeichenketten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, also Zeichenketten welche den natürlichen Zahlen notiert zur Basis 4 entsprechen. Die Summe der Ziffern einer solchen Zeichenkette kann wiefolgt induktiv definiert werden:

   $$\mathsf{qit}(\epsilon) = 0 \qquad \mathsf{qit}(wx) = \mathsf{qit}(w) + x$$

   mit $w \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma$.
   Beispiel: $\mathsf{qit}(1203) = \mathsf{qit}(120) + 3 = \mathsf{qit}(12) + 0 + 3 = \ldots = 0 + 1 + 2 + 0 + 3 = 6$.

   a) Geben Sie eine induktive Definition der Funktion $(\_)_4$ an, welche einer Zeichenkette über dem Alphabet $\Sigma$ einen Zahlenwert zuweist.
   Beispiel: $(1203)_4 = 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 = 99$.
   *Hinweis*: Beachten Sie die Definition von $\mathsf{qit}$.

   b) $(w)_4$ ist genau dann durch 3 teilbar wenn $\mathsf{qit}(w)$ durch 3 teilbar ist, z.B. $(222)_4 = 42 \equiv 0 \equiv 6 = \mathsf{qit}(222) \pmod 3$. Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $w \in \Sigma^*$ die Behauptung $(w)_4 \equiv \mathsf{qit}(w) \pmod 3$ gilt.