

- 1) Zeigen Sie mithilfe struktureller Induktion, dass $\forall a \in \mathbb{N}, a \times 1 = a$ gilt.

Erinnern Sie sich daran, dass die natürlichen Zahlen \mathbb{N} zwei Konstruktoren haben: 0 und die Nachfolgerfunktion (Englisch: „successor“) $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := 0 \mid S \mathbb{N}$$

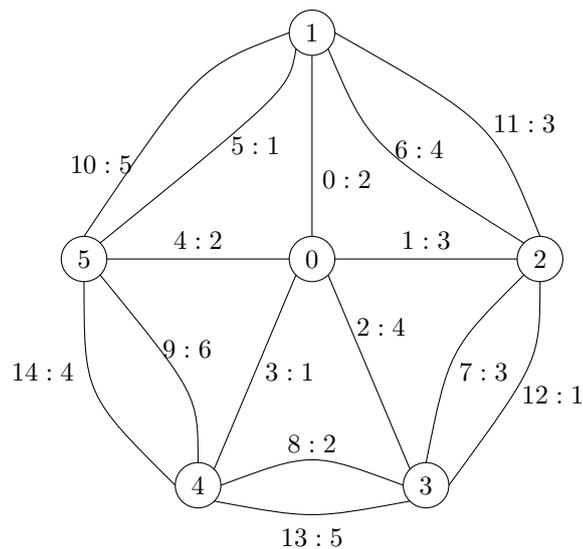
Die Multiplikation $\times : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} 0 \times b &= 0 \\ (S m) \times b &= b + (m \times b) \end{aligned}$$

mit der Addition $+$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, welche ebenfalls rekursiv definiert ist:

$$\begin{aligned} 0 + b &= b \\ (S m) + b &= S (m + b). \end{aligned}$$

- 2) Berechnen Sie mittels des Algorithmus von Kruskal einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung für den folgenden Graphen:



- 3) Wie lautet die Siebformel (spezialisiert) für drei Mengen? Wie kann dieser Sachverhalt grafisch dargestellt werden?

90 Studierende der Informatik werden bezüglich Ihres Klausurverhaltens befragt. Von diesen nahmen 35 an der Klausur A teil, 50 an der Klausur B und 32 an der Klausur C. 14 Personen nahmen an A und B teil, 4 Personen an A und C und 10 Personen an B und C. Wie viele Studierende nahmen an genau einer bzw. zwei bzw. drei Klausuren teil?

(Diese Aufgabe wurde am 26. April korrigiert.)

- 4) Wie lautet die *Regel des zweifachen Abzählens*?

Betrachten Sie folgendes Szenario: Jeder Informatikstudent muss im aktuellen Semester zumindest ein Wahlfach belegen. Es gibt die folgenden Anmeldezahlen:

Softwarequalität:	23
Maschinelles Lernen:	11
Termersetzungssysteme:	8

Außerdem weiß man, dass 2 Studenten alle drei Fächer belegen, 4 Studenten besuchen sowohl Termersetzungssysteme als auch Maschinelles Lernen, 2 Studenten besuchen sowohl Termersetzungssysteme als auch Softwarequalität und 5 Studenten besuchen sowohl Softwarequalität als auch Maschinelles Lernen.

Stellen Sie diese Situation als bipartiten Graphen dar und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- a) Wie viele Informatikstudenten gibt es insgesamt?
 - b) Wie viele Studenten besuchen nur ein einziges Wahlfach?
- 5) Das Pascalsche Dreieck ordnet die Binomialkoeffizienten (siehe Satz 6.2) in einem unendlichen Dreieck an:

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10	5		1
1				...					1

Wir können $\binom{n}{k}$ als k tes Element der n ten Reihe (von 0 zählend) ablesen, z.B. $\binom{5}{2} = 10$ als Zahl an Stelle 2 in der Reihe 5. Die Elemente des Dreiecks ergeben sich jeweils aus der Summe der zwei Elemente diagonal darüber, z.B. $\binom{5}{2} = 10 = 4 + 6 = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$, und im Allgemeinen wie folgt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \tag{1}$$

- a) Zeigen Sie, dass (1) für alle natürlichen Zahlen n und k gilt.
- b) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ für alle natürlichen Zahlen n und k wiederum eine natürliche Zahl ist. (Aus der Definition in Satz 6.2 ist nur klar, dass $\binom{n}{k}$ eine rationale Zahl ist.)
Hinweis: Induktion und (1).