1) Gegeben seinen die Mengen $\mathbb{B} = \{\mathsf{False}, \mathsf{True}\}$ und $C = \{0, 1, 2\}$.

   a) Wieviele verschiedene binäre Operationen $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ auf Booleschen Werten gibt es?

   b) Wieviele verschiedene injektive Funktionen $g : C \to \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ gibt es?

2) Zeigen Sie, dass $2^n \geq n^2$ für alle $n \geq 5$ gilt, *ohne* Induktion zu verwenden.

   Hinweis: $2^n = (1+1)^n$ lässt sich als Summe von Binomialkoeffizienten schreiben. Zeigen Sie, dass sogar $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} \geq n^2$ für alle $n \geq 7$ gilt. Dafür benötigen Sie nur die Definition von $\binom{n}{k}$ und einfache Abschätzungen.

3) Beweisen Sie mittels der Methode des zweifachen Zählens, dass für alle $n, d \in \mathbb{N}$, mit $n \geq d$, gilt:

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

   Hinweis: Sie haben n Eier, die von 1 bis n durchnummeriert sind. Jedes davon soll entweder rot, grün oder blau gefärbt werden, so dass am Ende genau d Eier blau sind. Zählen Sie die Möglichkeiten, die Eier so zu färben.

4) Wie lautet der *Satz von Schröder-Bernstein*?

   Die Dyck-Sprache D_1 ist die Wortmenge der korrekt geklammerten (wohlgeformten) Ausdrücke. Formal kann man diese Ausdrücke durch die kontextfreie Grammatik:

$$S \longrightarrow \epsilon \mid (S)S$$

   definieren. Zum Beispiel sind () und ()() Elemente von D_1, aber weder (noch))((.

   a) Zeigen Sie mit dem Satz von Bernstein, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und D_1 gleichmächtig sind. *Hinweis*: Finden Sie eine injektive Abbildung `n2d` von $\mathbb{N}$ nach D_1 und eine injektive Abbildung `d2n` von D_1 nach $\mathbb{N}$.

      Für Interessierte wird im Tutorium besprochen, wie zwei *bijektive* Funktionen für `n2d` und `d2n` implementiert werden können, sodass `n2d` die inverse Funktion zu `d2n` ist und umgekehrt.

   b) Skizzieren Sie, wie man mit dem Satz von Bernstein zeigen kann, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und C gleichmächtig sind, wobei C die Menge aller C-Programme ist.

5) Wie ist "klein-o" definiert, bzw. was bedeutet der Zusammenhang $f \in \mathrm{o}(g)$?

   Zeigen oder widerlegen Sie: für alle reele Zahlen r und $m > 0$, gilt

$$\log(n)^r \in \mathrm{o}(n^m)\ .$$