1) In der Vorlesung wird mit der Methode der erzeugenden Funktionen folgende Formel für die Fibonacci-Zahlen bewiesen:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

wobei f definiert ist durch $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für alle $n \geq 2$.

Beweisen Sie die oben angegebene Formel mittels vollständiger Induktion.

2) Die Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$a(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ 2a(n-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die erzeugende Funktion für a.

3) Zwei n-Bit Integers x und y sollen mithilfe eines Divide-and-Conquer Alorithmus multipliziert werden. Dafür werden x und y in jedem Schritt in eine linke und rechte Hälfte von jeweils $n/2$ Bits aufgeteilt, sodass $x = 2^{n/2}x_L + x_R$, $y = 2^{n/2}y_L + y_R$.

Der Einfachheit halber dürfen Sie annehmen, dass es sich bei n um eine Zweierpotenz handelt.

a) Beschreiben Sie den vollständigen Divide-and-Conquer-Algorithmus zur Multiplikation von x und y.
Hinweis: Überlegen Sie sich wie die einzelnen Teile von x und y kombiniert werden müssen.

b) Geben Sie die rekursive Funktion $T(n)$ für die Gesamtlaufzeit Ihres Algorithmus an und bestimmen Sie dessen asymptotische Laufzeit mithilfe des Master-Theorems.

4) Angenommen es gibt einen rekursiven Algorithmus A, dessen Zeitkomplexität durch $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ gegeben ist. Zudem gibt es eine Rekurrenzgleichung $T(n) = T(\lfloor \frac{3}{4}n \rfloor) + 2n$ für $n > 1$.

a) Berechnen Sie die Zeitkomplexität $T(16)$ und die Werte von T, die für die Berechnung benötigt werden.

b) Verwenden Sie das Master-Theorem um zu zeigen, dass die Komplexität von A linear ist.

5) Angenommen, es gibt einen Algorithmus A', welcher ein Problem der Größe n ($n \geq 2$) in zwei Probleme der Größe $\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor$ bzw. $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$ teilt, diese durch rekursive Aufrufe löst, und deren Ergebnisse mit einem Rechenaufwand von $2n$ kombiniert, um somit das Ergebnis des ursprünglichen Problems zu erhalten. Das heißt, $T'(n) = T'(\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor) + T'(\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor) + 2n$ für alle $n > 1$. Weiter gilt $T'(0) = 0$ und $T'(1) = 1$.

a) Kann das Master-Theorem verwendet werden, um die Komplexität von A' zu bestimmen?

b) Beweisen Sie mittels wohlfundierter Induktion nach n, dass $T'(n) \leq 8n$ gilt, dass also die Komplexität von A' linear ist.