1) *Lösung.* a) Die Aussage $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ist nicht allgemeingültig, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: $\{a, b\} \setminus (\{a\} \cup \{b\}) = \{\}$, aber $(\{a, b\} \setminus \{a\}) \cup (\{a, b\} \setminus \{b\}) = \{a, b\}$.

b) Zunächst zeigen wir $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ und } (x \in A \setminus C) \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Nun zeigen wir $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ und } (x \in A \setminus C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

$\square$

2) *Lösung.* Um zu zeigen, dass die Aussagen nicht äquivalent sind, reicht es gemäß Sektion 1.2.6 ein Gegenbeispiel anzugeben. Wenn die Aussage A falsch ist, dann ist $(A \wedge B) \rightarrow C$ wahr, aber $A \wedge (B \rightarrow C)$ falsch, unabhängig von B, C. $\square$

3) *Lösung.* Nehmen Sie an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ gibt, wobei p_n die größte existierende Primzahl ist.

Wenn nun $k = p_1 p_2 p_3 ... p_n + 1$ gewählt wird, dann gilt $k > p_n$ und somit kann k keine Primzahl sein. Dadurch muss gelten, dass k ohne Rest durch eine Primzahl aus $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ dividiert werden kann. Angenommen k ist ohne Rest durch p_i, $1 \leq i \leq p_n$ dividierbar. Dann ist $\frac{k}{p_1}$ eine Ganzzahl. Aber $\frac{k}{p_i} = \frac{p_1 p_2 p_3 ... p_i ... p_n}{p_i} + \frac{1}{p_i}$ kann keine Ganzzahl sein. Dadurch muss die Annahme, dass nur endlich viele Primzahlen existieren falsch sein. $\square$

4) *Lösung.* Aus der Wahrheitstabelle können wir ablesen:

a) S_1 muss eingeschaltet sein; S_2 kann ein- oder ausgeschaltet sein.

b) S_2 muss eingeschaltet sein; S_1 kann ein- oder ausgeschaltet sein.

c) S_1 muss eingeschaltet sein und S_2 muss ausgeschaltet sein.

d) Sowohl S_1 als auch S_2 müssen ausgeschaltet sein.

$\square$

5) *Lösung.* a) Die Aussage ist wahr, eine graphische Argumentation ist am einfachsten.

b) Einfaches Gegenbeispiel: $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $f\colon \{0,1\} \to 1$.

c) Wir zeigen $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ direkt:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B \text{ mit } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y \text{ und } \exists x \in B \text{ mit } f(x) = y \qquad (\star) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ und } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Die umgekehrte Richtung von Schritt $(\star)$ gilt nur da f als injektiv vorausgesetzt ist, da sonst das x in $\exists x \in A$ und $\exists x \in B$ jeweils verschiedene Werte annehmen könnte. $\square$