1) *Lösung.* Wenn $x \equiv 0 \pmod 7$, dann ist $x^8 + x^6 - x^2 \equiv 0 \pmod 7$, also ist $\bar{0}$ keine Lösung der ursprünglichen Gleichung (da $-1 \not\equiv_7 0$ ist).

   Sei also $x \not\equiv_7 0$. Laut dem kleinen Satz von Fermat ist dann $x^6 \equiv_7 1$ und $x^8 \equiv_7 x^6 \cdot x^2 \equiv_7 1 \cdot x^2$ also gilt:

$$x^8 + x^6 - x^2 - 1 \equiv x^2 + 1 - x^2 - 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

   Es folgt, dass die Lösungen der Gleichung genau die Zahlen aus den Restklassen $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{6}$ sind (also die ganzen Zahlen, die kein Vielfaches von 7 sind). □

2) *Lösung.*
   a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und alle endlichen Folgen von Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt, dass $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(\max_{1 \leq i \leq n} x_i) = n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ durch Monotonie (n mal $x_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i$), wodurch (1) gezeigt ist.

   b) Es sei x_i die Anzahl der Tauben in Flugloch i, für $1 \leq i \leq 5$. Nun liefert (1), dass $2 < \frac{11}{5} \leq \max_{1 \leq i \leq 5} x_i$ ist. Da die Anzahl der Tauben in einem Flugloch immer eine natürliche Zahl ist, können wir darauf schließen, dass mindestens ein Flugloch mit 3 Tauben besetzt ist.

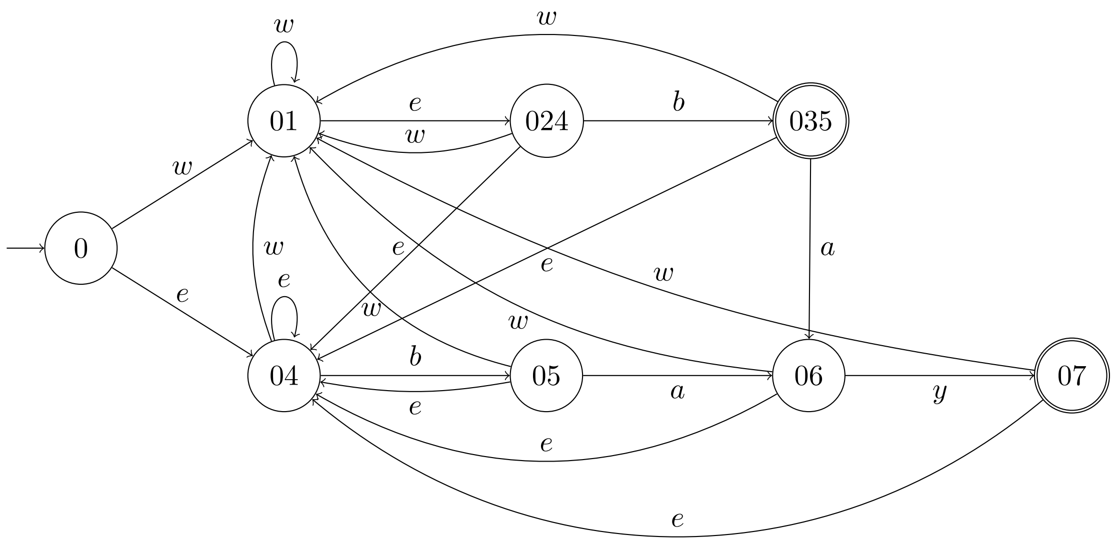
      Durch das Taubenschlagprinzip können wir vorerst nur ableiten, dass es mindestens ein Flugloch gibt, welches mit *zwei* Tauben besetzt ist. Dann ist es entweder der Fall, dass dieses Loch *drei* Tauben enthält, oder dass die verbleibenden 4 Löcher 9 Tauben enthalten müssen, was wir formal durch Induktion zeigen können. (Offensichtlich hilft uns das Taubenschlagprinzip hier wenig, der Induktionsbeweis zeigt erneut das Taubenschlagprinzip. Wir könnten also die Behauptung auch gleich direkt zeigen.)

   c) Sei N die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$, wobei die y_i paarweise verschieden natürliche Zahlen sind. Es sei x_i $(1 \leq i \leq n)$ die Anzahl der Urbilder von y_i unter der Funktion f, also $x_i = \#(f^{-1}(y_i))$. Dann gilt

$$n = \#(N) < \#(M) = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

      durch (1) und dadurch, dass f eine (totale) Funktion ist, sodass jedes Element von M das Urbild exakt eines y_i ist. Wir teilen durch n und erhalten, dass $1 < \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ gilt. □

5) *Lösung.*



$\square$