3) a) Intuitiv wissen wir, dass DEAs nicht „zählen" können, ein Automat für L müsste aber genau das tun. Er müsste die Anzahl der 0er am Anfang eines Wortes bestimmen und sich merken können, um später zu vergleichen, dass das Ende des Wortes wieder *genau die gleiche* Anzahl an 0ern enthält.

Variante 1. Wir begründen nun formal, warum es keinen DEA D mit $L = \mathsf{L}(D)$ geben kann:
Angenommen D hat n Zustände. Das bedeutet intuitiv, dass D „nur bis $n-1$ zählen kann". Wir nutzen dies aus, indem wir ein Wort mit Länge mindestens n betrachten. Wir wählen $w = 0^n10^n \in L$. Da D nur n Zustände hat, existieren i, j mit $0 \leq i < j < n$, sodass $\hat{\delta}(s, 0^i) = \hat{\delta}(s, 0^j)$. (Dies formalisiert den Umstand, dass es Wörter gibt, die der Automat D nicht unterscheiden kann, da er nicht beliebig weit zählen kann.) Der Automat muss also beim Lesen des Wortes 0^n irgendwo eine Schleife der Länge $j-i$ durchlaufen. Damit liegt also das neue Wort $w' = 0^{n+j-i}10^n$ in $\mathsf{L}(D)$. (w' durchläuft die Schleife einmal mehr als w.) Da $w' \notin L$, erhalten wir einen Widerspruch zu $L = \mathsf{L}(D)$. Also muss unsere Annahme, dass L regulär ist, falsch gewesen sein. $\square$

Variante 2. Der obige Beweis entspricht dem allgemeinen Beweis des Schleifenlemmas (Satz 8.65). Alternativ können wir auch direkt die Kontraposition des Schleifenlemmas instantiieren (Satz 8.66):

– Für beliebiges n wählen wir das Wort $w = 0^n10^n \in L$ sodass $\ell(w) \geq n$.
– Für alle x, y, $z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leq n$ wissen wir, durch unsere Wahl von w, dass xy und damit auch y nur aus 0ern bestehen kann. Also haben wir $y = 0^i, 0 < i \leq n$.
– Wir wählen $k = 2$, damit gilt $w' = xy^2z = 0^{n+i}10^n \notin L$.

$\square$

b) Zum Beispiel 0*10*.

4) *Lösung.* Wir verwenden Satz 8.66 und wählen $w = a^nba^n \in L$. Somit ist $\ell(w) \geqslant n$. Sei $w = xyz$ mit $y \neq \epsilon$ und $\ell(xy) \leqslant n$. Somit ist $\ell(y) = i$ mit $0 < i \leqslant n$. Für $k = 2$ ist $xy^2z = a^{n+i}ba^n$ und weil $n + i \neq n$ ist somit $xy^2z \notin L$. $\square$

5) *Lösung.* Wir verwenden die Kontraposition des Schleifen-Lemma, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{\mathsf{a}^{n!} \mid n \geq 0\}$$

nicht regulär ist.

Dazu wählen wir für ein beliebiges n das Wort $w = \mathsf{a}^{n!} \in L$ mit $l(w) \geq n$. Nun können wir w in $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = xyz, y \neq \epsilon$ und $l(xy) \leq n$ zerlegen. Da für $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$m! < 2m! < (m+1)!\ ,$$

können wir $k = 2$ wählen, sodass $xy^kz \notin L$. $\square$