1) *Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

- (Induktionsbasis) Für $n = 5$ gilt $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.
- (Induktionsschritt) Wir nehmen an, dass $n^2 < 2^n$ für ein beliebiges $n \geq 5$ gilt, und wollen $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ zeigen. Aus unserer Annahme (Induktionshypothese) folgt $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir zeigen, dass $2n^2 \geq (n+1)^2$, also $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ (oder $n^2 \geq 2n + 1$), für alle $n \geq 5$ gilt. Dies ist leicht zu sehen, denn für $n \geq 5$ haben wir $n^2 = n \times n \geq 5 \times n = 4n + n \geq 2n + 5 \geq 2n + 1$.

Das Prinzip der vollständigen Induktion gewährleistet nun, dass $n^2 < 2^n$ für alle natürlichen $n \geq 5$ gilt.

□

4) a) Wenn $x = -z$ und $z = -y$, dann $x = -(-y) = y$. Umgekehrt, wenn $x = y$, dann $x = -z$ und $z = -(-z) = -x = -y$, für $z = -x$.

b) Sei $x\ R\ y$. Aus der Spiegel-Eigenschaft ($x = x$) folgt, dass $z \in M$ existiert mit $x\ R\ z$ und $z\ R\ x$. Aus der Spiegel-Eigenschaft ($z\ R\ x$ und $x\ R\ y$) folgt, dass $z = y$, somit $y\ R\ x$;

c) Die Relation $\neq$ auf $\mathbb{N}$ ist symmetrisch aber besitzt die Spiegel-Eigenschaft nicht. Zum Beispiel $1 \neq 2 \neq 3$. (Bemerkung: Auf $\{0, 1\}$ besitzt $\neq$ die Spiegel-Eigenschaft.)

5) Seien $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$, $v = (v_0, ..., v_{m-1})$, und $u = (u_0, ..., u_{\ell-1})$ Sequenzen über dem Alphabet Σ.

a) Die Subsequenz-Relation ist partiell. Um dies zu beweisen müssen wir zeigen, dass Reflexivität, Transitivität, und Antisymmetrie gelten.

(Reflexivität) Dass w eine Subsequenz von sich selbst ist, kann gezeigt werden, wenn man $(0, \ldots, n-1)$ und $i_k = k$ nimmt. Daraus folgt, dass man $w_k = w_k$ für alle $0 \leq k < n - 1$ zeigen muss, was trivial ist.

(Transitivität) Angenommen w ist eine Subsequenz von v, gegeben durch $(i_0, \ldots, i_{n-1})$. Und v ist eine Subsequenz von u, gegeben durch $(j_0, \ldots, j_{m-1})$. Dann können wir behaupten, dass w eine Subsequenz von u ist, was durch $(j_{i_0}, \ldots, j_{i_{n-1}})$ gegeben ist. Die Behauptung stimmt, da $w_k = v_{i_k} = w_{j_{i_k}}$ gilt, was für alle $0 \leq k < n - 1$ aus der ersten und zweiten Behauptung folgt.

(Antisymmetrie) Um Antisymmetrie zu zeigen, ist es wichtig zu wissen, wenn w eine Subsequenz von v ist, dann ist w nie länger als v, z.B. $n \leq m$. Wenn wiederum v eine Subsequenz von w ist, dann gilt $m \leq n$. Durch Antisymmetrie von $\leq$ folgt, dass w und v die gleiche Länge $n = m$ haben müssen.
Die Bedingung dafür, dass w eine Subsequenz von v ist, dann gilt $0 \leq i_0 < \ldots < i_{n-1} < n$. Dies bedeutet, dass $i_k = i$ für alle $0 \leq k < n$. Was wiederum bedeutet, dass $w_k = v_k$ für alle k, was zu beweisen war.

b) Die Teilwort-Relation ist partiell. Wir erweitern die Beweise aus a).

(Reflexivität) Es genügt zu zeigen, dass $(0, \ldots, n-1)$ eine Sequenz an fortlaufenden Nummern $k, k+1$ ist.

(Transitivität) Es genügt zu zeigen, wenn $(i_0, \ldots, i_{n-1})$ und $(j_0, \ldots, j_{m-1})$ Sequenzen von fortlaufenden Nummern sind, dann sind $i_{k+1} = i_k + 1$ und $j_{k+1} = j_k + 1$ für ein geeignetes k wahr. Somit gilt $(j_{i_0}, \ldots, j_{i_{n-1}})$, durch $j_{i_{k+1}} = j_{i_k+1} = j_{i_k} + 1$.

(Antisymmetrie) Gleich wie Reflexivität

c) Ja, wenn v ein Teilwort von w ist, dann ist es auch eine Subsequenz von u. Durch Transitivität von Subsequenzen gezeigt in a).

d) Wenn w ein wahres Teilwort von v ist, dann ist die Länge von w mindestens um 1 kleiner als die von v. Da das Wort *Unendlichkeit* die Länge 13 hat, ist die längste Sequenz von Worten 14. (Das leere Wort erhöht eine Sequenz um Länge 1).