1) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $a < b$.

   a) Es gibt zwei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} a$ gilt: ϵ und a.

   Es gibt drei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} b$ gilt: ϵ, a, b.

   Es gibt zwei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} a$ gilt: ϵ und a.

   Es gibt jedoch unendlich viele Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} b$ gilt. Z.B. haben wir:

$$\epsilon <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} aa <_{\text{lex}} aaa <_{\text{lex}} aaaa <_{\text{lex}} \ldots <_{\text{lex}} b.$$

   b) Wenn $w <_{\text{lex}} v$ und $\ell(w) = \ell(v)$ gelten, dann gibt es laut der Definition von $<_{\text{lex}}$ ein $k \in \{0, \ldots, \ell(w) - 1\}$, so dass $w_i = v_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ gilt, aber $w_k < v_k$ ist. Dann gilt aber auch für $w' = wa$, dass $w'_i = v_i$ (für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$) und $w'_k < v_k$ ist. Also ist $w' <_{\text{lex}} v$. Da die ersten $\ell(w)$ Zeichen von w und w' übereinstimmen, w' aber länger ist als w, folgt (wieder aus der Definition von $<_{\text{lex}}$): $w <_{\text{lex}} w'$. Also haben wir $w < w' < v$.

2) *Lösung.* Im Basisfall ist $n = 1$ und somit $1! = 1^1$. Im Induktionsschritt ist $n \geq 1$ und $n \to n+1$. Die Induktionshypothese lautet $n! \leq n^n$. Zu zeigen ist $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$ was leicht nachgeprüft werden kann:

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq n^n(n+1) < (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$$

□

3) *Lösung.* Wir wählen die graduiert-lexikographische Ordnung $\leq_{\text{gradlex}}$ (mit $a < b$).

   - Basis: Da $\leq_{\text{gradlex}}$ total ist, ist ϵ das einzige minimale Element. In der Tat hat ϵ eine gerade Anzahl von as.
   - Schritt: Sei w ein beliebiges nicht-minimales Element. Somit ist $w \neq \epsilon$. Die Induktionshypothese gilt für alle x mit $x <_{\text{gradlex}} w$ und besagt, dass wenn x ein Palindrom gerader Länge ist, dass x dann eine gerade Anzahl an as enthält. Wir zeigen „$w \in P$ und $\ell(w)$ gerade impliziert w hat gerade Anzahl an as“. Da w ein Palindrom gerader Länge ungleich ϵ ist, hat w eine der beiden Gestalten
     - $w = axa$
     - $w = bxb$

     Beachte, dass auch x ein Palindrom gerader Länge ist. Da $x <_{\text{gradlex}} w$ hat x eine gerade Anzahl von as und somit auch w. □

4) *Beweis.* Wir zeigen die Aussage durch strukturelle Induktion über a:

   - Basis: $0 + b = b + 0$. Per Definition gilt $b = b + 0$, was durch Induktion über b gezeigt werden kann.

- SCHRITT: Wir formen $S\,a + b = b + S\,a$ durch Anwendung der Definition in $S\,(a+b) = b+S\,a$ um, dann wenden wir die Inkduktionshypothese an und erhalten $S\,(b+a) = b+S\,a$. Nun zeigen wir durch Induktion über b, dass $S\,(b+a) = b + S\,a$:
  - BASIS: Wir wenden auf $S\,(0+a) = 0+S\,a$ die Definition an und erhalten $S\,a = S\,a$.
  - SCHRITT: IH: $S(b+a) = b+Sa$. Wir formen $S\,(S\,b+a) = S\,b+S\,a$ in $S(S(b+a)) = S(b+Sa)$ um. Durch Anwendung der Induktionshypothese auf die linke Seite erhalten wir $S(b+Sa) = S(b+Sa)$.

$\square$

5) *Lösung.* a) $(\epsilon)_4 = 0$ und $(wx)_4 = (w)_4 \cdot 4 + x$.

b) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über w. Im Basisfall gilt $(\epsilon)_4 = 0 = \mathsf{qit}(\epsilon)$. Im Induktionsschritt gilt $(wx)_4 = (w)_4 \cdot 4 + x \equiv (w)_4 + x \equiv \mathsf{qit}(w) + x = \mathsf{qit}(wx) \pmod 3$. Die erste Äquivalenz gilt, da $4 \equiv 1 \mod 3$, die zweite Äquivalenz gilt durch die Induktionshypothese für w, die zwei Gleichheiten gelten durch die Definition von $(\_)_4$ and $\mathsf{qit}(\_)$.

$\square$