1) *Lösung.* a) $\log(n^{100}) = 100 \log n \in \mathrm{O}(\log n)$

b) $1.5^{n^2} = 2^{\log_2(1.5)n^2}$ und es gilt $\log_2(1.5)n^2 > n^2/2 \geq n$ für alle $n \geq 2$. Also ist $2^n \in \mathrm{O}\left(1.5^{n^2}\right)$.

$1000 \sin n \in [-1000, 1000]$, also gilt $2^n + 1000 \sin n \geq 0$ für alle $n \geq 10$.

Es folgt $2^n + 1000 \sin n \in \mathrm{O}\left(1.5^{n^2}\right)$.

c) $n^k = 2^{k \log n}$, und für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ haben wir $k \log n \in \mathrm{O}(n)$ (denn k ist jetzt fixiert, also konstant). Also gilt $n^k \in \mathrm{O}(2^n)$.

Alternative Lösung (ohne die Tatsache, dass $\log n \in \mathrm{O}(n)$ gilt, vorauszusetzen):

Sei $k \in \mathbb{N}$ festgelegt. Wir haben bewiesen (Blatt 2, Aufgabe 1), dass $2^n \geq n^2$ für alle $n \geq 5$ gilt. Nun haben wir $2^n \geq n^k \iff 2^{n/k} \geq n$. Laut Aufgabe 2.1 gilt $2^{n/k} \geq (n/k)^2$ für $n/k \geq 5$. Aber $(n/k)^2 \geq n$ für $n \geq k^2$. Also haben wir $2^{n/k} \geq n$ wenn $n \geq \max\{5k, k^2\}$ ist. Es folgt $n^k \in \mathrm{O}(2^n)$.

d) $n^2 \log n \leq (n \log n)^2$ für $n \geq 2$ und $(n \log n)^2 \in \mathrm{O}\left((n \log n)^2 - 10^{10}\right)$ (additive Konstanten haben keinen Einfluss auf $\mathrm{O}()$).

Also gilt $n^2 \log n \in \mathrm{O}\left((n \log n)^2 - 10^{10}\right)$.

$\square$

2) *Lösung.* a) $\mathsf{Cons}(\texttt{'U'}, \mathsf{Cons}(\texttt{'I'}, \mathsf{Cons}(\texttt{'B'}, \mathsf{Cons}(\texttt{'K'}, \mathsf{Nil}))))$

b)

$$|l| := \begin{cases} 1 + |xs| & \text{wenn } l = \mathsf{Cons}(x, xs), \\ 0 & \text{wenn } l = \mathsf{Nil}. \end{cases}$$

c) Basis: $xs \to \mathsf{Nil}$

$$\begin{aligned} \mathsf{append}(\mathsf{Nil}, \mathsf{append}(ys, zs)) &\stackrel{?}{=} \mathsf{append}(\mathsf{append}(\mathsf{Nil}, ys), zs) \\ \mathsf{append}(ys, zs) &= \mathsf{append}(ys, zs) \end{aligned}$$

Der Basisfall kann durch einmalige Anwendung der Definition von append auf beiden Seiten gezeigt werden.

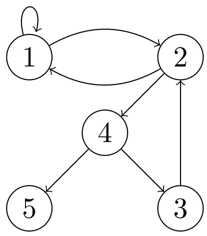
Schritt: $xs \to \mathsf{Cons}(x, xs)$

$$\begin{aligned} \mathsf{append}(\mathsf{Cons}(x, xs), \mathsf{append}(ys, zs)) &\stackrel{?}{=} \mathsf{append}(\mathsf{append}(\mathsf{Cons}(x, xs), ys), zs) \\ \mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(xs, \mathsf{append}(ys, zs))) &\stackrel{?}{=} \mathsf{append}(\mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(xs, ys)), zs) \\ \mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(xs, \mathsf{append}(ys, zs))) &\stackrel{?}{=} \mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(\mathsf{append}(xs, ys), zs)) \\ \mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(\mathsf{append}(xs, ys), zs)) &= \mathsf{Cons}(x, \mathsf{append}(\mathsf{append}(xs, ys), zs)) \end{aligned}$$

Im Schritt wenden wir bei den ersten zwei Zeilen die Definition von `append` an. Abschließend verwenden wir die Induktionshypothese.

$\square$

4) *Lösung.* Die transitive Hülle einer Relation R ist die kleinste transitive Relation, die R enthält. Der Graph von R kann wie folgt visualisiert werden:



Der Algorithmus von Floyd-Warshall liefert die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

5) *Lösung.* Abstandsmatrix zu Beginn der Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 12 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & 4 & 6 \\ \infty & 8 & 0 & \infty & \infty \\ 12 & 4 & \infty & 0 & 7 \\ \infty & 6 & \infty & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Abstände über die Knoten **A** und **B**, nach zwei Iterationen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 13 & 9 & 11 \\ 5 & 0 & 8 & 4 & 6 \\ 13 & 8 & 0 & 12 & 14 \\ 9 & 4 & 12 & 0 & 7 \\ 11 & 6 & 14 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Weitere Iterationen verändern die Abstandsmatrix nicht mehr, d.h. es gibt keine kürzeren Pfade über die Knoten **C**, **D** und **E**. $\square$