1) *Lösung.* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über a:

(Basis) Wir zeigen $0 \times 1 = 0$. Durch Anwendung der Definition von $\times$ erhalten wir $0 = 0$.

(Schritt) Wir zeigen $S\ a \times 1 = S\ a$ mit Hilfe der Induktionshypothese $a \times 1 = a$. Dazu wenden wir die Definition von $\times$ auf die linke Seite an und erhalten $1 + (a \times 1)$. Dann verwenden wir die Induktionshypothese und erhalten $1+a$. Schließlich wenden wir zweimal die Definition von $+$ an und zeigen damit den Schrittfall.

□

5) *Lösung.* a) Sei M eine Menge mit $n+1$ Elementen und $a \in M$ ein beliebiges Element davon. Wir schreiben $M = M' \cup \{a\}$. Nun können wir aus M $k+1$ Elemente auf die folgenden zwei Arten auswählen. Entweder wählen wir $k+1$ Elemente aus der Teilmenge M' oder wir wählen das Element a und zusätzlich noch k Elemente aus M'. Somit gilt $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Alternativ können wir die Definition aus Satz 6.12 verwenden:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

für die Fälle mit $k < n$. Wenn $k > n$ sind beide Seiten 0, und wenn $k = n$ sind beide Seiten 1.

b) Beachten Sie, dass aus der Definition (Satz 6.12) nicht offensichtlich hervorgeht, dass Binomialkoeffizienten tatsächlich natürliche Zahlen sind.

Wir zeigen durch Induktion über n, dass für alle k gilt, dass $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist.

- Im Basisfall zeigen wir, dass für alle k gilt, dass $\binom{0}{k}$ eine natürliche Zahl ist. Wenn $k > 0$, dass ist $\binom{0}{k} = 0$ per Definition eine natürliche Zahl. Sonst ist $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$, wiederum eine natürliche Zahl.
- Im Induktionsschritt zeigen wir, dass für alle k gilt, dass $\binom{n+1}{k}$ eine natürliche Zahl ist. Wenn $k = 0$, dann $\binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1$. Sonst, wenn $k > 0$ und durch Zuhilfenahme des vorherigen Beweises, schreiben wir $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Durch die Induktionsannahme sind $\binom{n}{k-1}$ und $\binom{n}{k}$ jeweils natürliche Zahlen, und damit auch deren Summe.

□