2) *Lösung.* Für alle $n \geq 7$ gilt:

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&\geq \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n-1}{6}\left[3n + n(n-2)\right] = \frac{n-1}{6} n(n+1) \\
&\geq 1 \cdot n^2,
\end{aligned}
$$

wobei $(n-1)/6 \geq 1$ in der letzten Ungleichung aus der Bedingung $n \geq 7$ folgt. (Zu beachten: Die Anwendung der Definition der Binomialkoeffizienten in der zweiten Zeile setzt auch voraus, dass $n \geq 3$ gilt, weil sonst die beiden Brüche nicht Werten von Binomialkoeffizienten entsprechen würden.) Die Fälle $n = 5$ und $n = 6$ werden durch direktes Rechnen behandelt. □

3) *Lösung.* Wir müssen die Anzahl der Möglichkeiten zählen, n durchnummerierte Eier mit den Farben rot, grün und blau so zu färben, dass am Ende genau d Eier blau sind.

Wir können einerseits zuerst die d Eier auswählen, die blau gefärbt werden sollen, um dann jedes der $n-d$ verbleibenden Eier entweder rot oder grün zu färben. Diese Betrachtung ergibt $\binom{n}{d} \times 2^{n-d}$ Färbungsmöglichkeiten ($\binom{n}{d}$ Möglichkeiten, die Eier zu wählen, die blau gefärbt werden sollen, multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, $n-d$ Eier entweder rot oder grün zu färben).

Andererseits können zuerst k Eier ausgewählt werden, die man *nicht* grün färben wird. Da d Eier blau (also insbesondere nicht grün) zu färben sind, kann k einen der Werte $d, d+1, ..., n$ annehmen. Die Wahl der k nicht grün zu färbenden Eier kann auf $\binom{n}{k}$ Arten erfolgen. Wurden k Eier ausgewählt, die nicht grün gefärbt werden, dann sind davon d auszuwählen, die blau sein werden. Diese Zählweise ergibt $\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d}$ Färbmöglichkeiten.

Da in beiden Fällen dieselbe Menge von Färbungen abgezählt wird, ist die Gleichheit der beiden Ausdrücke bewiesen.

Anmerkung. Die Identität kann auch durch direktes Rechnen, ohne Anwendung der Methode des doppelten Abzählens, bewiesen werden, z.B. wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} &= \sum_{k=d}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{d!(k-d)!} = \sum_{k=d}^{n} \frac{n!}{d!(n-d)!} \cdot \frac{(n-d)!}{(n-k)!(k-d)!} = \\
&= \binom{n}{d} \sum_{k=d}^{n} \frac{(n-d)!}{(n-k)!(k-d)!} = \binom{n}{d} \sum_{k=0}^{n-d} \frac{(n-d)!}{(n-d-k)!k!} = \\
&= \binom{n}{d} \sum_{k=0}^{n-d} \binom{n-d}{k} = \binom{n}{d} \cdot 2^{n-d}.
\end{aligned}
$$

□

4) *Lösung.* a) Wir definieren einerseits $\mathsf{n2d}(n) = ()^n$, zum Beispiel, $2 \mapsto ()()$, und andererseits, induktiv,

$$\begin{aligned} \mathsf{d2n}(\epsilon) &= 0 \\ \mathsf{d2n}(w)) &= 2 \cdot \mathsf{d2n}(w) \\ \mathsf{d2n}(w() &= 2 \cdot \mathsf{d2n}(w) + 1 \end{aligned}$$

zum Beispiel, $() \mapsto 2$ und $()() \mapsto 10$.

b) Einerseits kann jedem C-Programm eine eindeutige Zahl zugeordnet werden (die binäre Representation des Programmes), und andererseits kann jeder Zahl einen C-Programm zugeordnet werden, zum Beispiel $347658 \mapsto$

```
#include <stdio.h>
int main()
{
   printf("Hello, World!, 347658");
   return 0;
}
```

$\square$

5) *Lösung.* Wir betrachten zwei Fälle. Sei zunächst $r \leqslant 0$, dann ist $-r \geqslant 0$ und wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^r}{n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log n)^{-r} n^m} = 0\,.$$

Nun betrachten wir den Fall $r > 0$. Sei $\epsilon = m/r > 0$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^r}{n^m} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\epsilon} = 0.$$

Durch Anwendung des Satzes von l'Hôspital berechnen wir letzteren Limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\epsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \epsilon n^{\epsilon-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon n^\epsilon} = 0.$$

Anmerkung. Eine weitere Lösung für den Fall $r > 0$, ohne Anwendung des Satzes von l'Hôspital, wäre folgende:

$$\frac{\log n}{n^\epsilon} = \frac{\log n}{2^{\epsilon \log n}} = \frac{\log n}{(1+1)^{\epsilon \log n}} \leq \frac{\log n}{\binom{\epsilon \log n}{2}} = \frac{\log n}{\log n \cdot \frac{\epsilon}{2}(\epsilon \log n - 1)} = \frac{1}{\frac{\epsilon}{2}(\epsilon \log n - 1)} \to 0,$$

wobei wir die $\lceil \cdot \rceil$-Funktion der Einfachheit halber weggelassen haben, und die Ungleichung für genügend große Werte von n gilt. $\square$