2) *Lösung.* $a_0 = 0, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1$

Einsetzen in die erzeugende Funktion $A(x)$:

$$A(x) - a_0 x^0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 1x^n$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite können wie folgt umgeschrieben werden:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2xA(x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2xA(x) + \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man $a_n = 2^n - 1$. Durch Induktion über n kann das Resultat überprüft werden:

$a_0 = 2^0 - 1 = 0$ ✓ [Basisfall]

$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ [Schritt, IH: $a_n = 2^n - 1$]

$= 2^n 2 - 1 = (2^n - 1 + 1)2 - 1 = 2a_n + 2 - 1$

$= 2a_n + 1$ ✓

□

4) *Lösung.* Angenommen, es gibt einen rekursiven Algorithmus A dessen Zeitkomplexität durch $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ gegeben ist. Und es gibt eine Rekurrenzgleichung $T(n) = T(\lfloor \frac{3}{4}n \rfloor) + 2n$ für $n > 1$.

a) Zur Berechnung von $T(16)$ werden folgende Werte benötigt: $T(1) = 1$, $T(2) = T(1) + 4 = 5$, $T(3) = T(2) + 6 = 11$, $T(4) = T(3) + 8 = 19$, $T(6) = T(4) + 12 = 31$, $T(9) = T(6) + 18 = 49$, $T(12) = T(9) + 24 = 73$, und $T(16) = T(12) + 32 = 105$.

b) Durch $\log_{\frac{4}{3}} 1 = 0 < 1$ folgt, dass wir im dritten Fall (des Beweises) des Master-Theorems sind. Die Regularitätskondition dieses Falles ((6.2) im Skriptum) benötigt die Existenz eines $c < 1$ und eines k, sodass $1 \cdot 2\lceil \frac{3}{4}n \rceil \leq c \cdot 2n$ für $n > k$, welches hält, was durch die Beobachtung von zum Beispiel $c = \frac{15}{16}$ und $k = 4$ folgt. Somit folgt, dass $T(n)$ in $\Theta(n)$ ist. □

5) *Lösung.* a) Nein, das Master-Theorem kann nur verwendet werden, wenn wir eine Anzahl an rekursiven Aufrufen haben, welche alle die *gleiche* Größe haben. (Hier haben sie verschiedene Größe, $\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor$ und $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$.)

b) Die Induktionshypothese der wohlfundierten Induktion zeigt, dass für alle $k < n$, $T'(k) \leq 8k$. Wir unterscheiden zwischen zwei Fällen in der Definition von T':

- $T'(0) = 0 \leq 0 = 8 \cdot 0$ und $T'(1) = 1 \leq 8 = 8 \cdot 1$;
- $T'(n) = T'(\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor) + T'(\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor) + 2n \leq 8\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor + 8\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + 2n \leq 8 \cdot \frac{1}{4}n + 8 \cdot \frac{1}{2}n + 2n = 8n$. Die erste Ungleichheit verwendet die Induktionshypothese zweimal, einmal für $\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor$ und einmal für $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$. $\square$