1) a) Wir wählen $m = 5$ mit den Indizes $3, 3, 1, 2, 2$.

b) Wir nehmen an, dass ein $m > 0$ und Indizes existieren, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

i. Sei $i_1 = 1$ oder $i_1 = 3$, dann gilt für alle $m > 0$, dass $|x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}| \neq |y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}|$, d.h $x \neq y$.

ii. Sei $i_1 = 2$, dann gilt $101 x_{i_2} \dots x_{i_m} \neq 100 y_{i_2} \dots y_{i_m}$.

Unabhängig von der Wahl für i_1 stimmen die Zeichenfolgen nicht überein. Daher ist unsere Annahme falsch und es existiert keine Lösung.

2) *Lösung.* Die folgende Turingmaschine M akzeptiert die gewünschte Sprache

$$M = (\{next, search_1, search_0, tostart, t, r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \#, \sqcup, \vdash\}, \sqcup, \vdash, \delta, next, t, r) ,$$

wobei die Übergangsfunktion δ wie folgt definiert ist:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
$next$	0	$(search_1, \#, \mathrm{R})$
$next$	1	$(search_0, \#, \mathrm{R})$
$next$	$\#$	$(next, \#, \mathrm{R})$
$next$	$\vdash$	$(next, \vdash, \mathrm{R})$
$next$	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{R})$
$search_1$	1	$(tostart, \#, \mathrm{L})$
$search_1$	0	$(search_1, 0, \mathrm{R})$
$search_1$	$\#$	$(search_1, \#, \mathrm{R})$
$search_1$	$\sqcup$	$(r, \sqcup, \mathrm{R})$
$search_0$	0	$(tostart, \#, \mathrm{L})$
$search_0$	1	$(search_0, 1, \mathrm{R})$
$search_0$	$\#$	$(search_0, \#, \mathrm{R})$
$search_0$	$\sqcup$	$(r, \sqcup, \mathrm{R})$
$tostart$	0	$(tostart, 0, \mathrm{L})$
$tostart$	1	$(tostart, 1, \mathrm{L})$
$tostart$	$\#$	$(tostart, \#, \mathrm{L})$
$tostart$	$\vdash$	$(next, \vdash, \mathrm{R})$

Für jede 0 wird die nächste 1 gesucht und für jede 1 die nächste 0. Beide werden jeweils durch das Zeichen # ersetzt. Dann wird wieder zum Beginn des Wortes zurückgegangen und von vorne begonnen. Kann für eine 0 oder eine 1 kein Partner gefunden werden, wird das Wort abgelehnt. Wird für jede 0 und 1 ein Partner gefunden, wird das Wort angenommen. Für eine Live-Demo der Turingmaschine klicken sie hier.

□

3) Wir führen einen Widerspruchsbeweiß:

   Angenommen solch ein DEA existiert, dann hat dieser laut Definition endlich viele Zustände. Wir nennen die Anzahl an unterschiedlichen Zuständen n, und betrachten die $n+1$ verschiedenen Wörter $\{01, 0011, ..., 0^{n+1}1^{n+1}\}$.

   Nun betrachten wir die Zustände in denen sich der Automat befindet, nachdem er alle 0en der $n+1$ Wörter gelesen hat. Dann sind diese Zustände entweder alle unterschiedlich, oder mindestens zwei Zustände sind identisch.

   In dem Fall, dass alle Zustände unterschiedlich sind, hat der Automat zumindest $n+1$ verschiedene Zustände, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

   Im anderen Fall existieren Wörter 0^p und 0^q mit $p \neq q$, sodass der Automat sich im selben Zustand R befindet. Folglich muss der Automat, damit das Wort 0^p1^p akzeptiert wird, von Zustand R mit dem Wort 1^p in den akzeptierenden Zustand gehen. Gleichzeitig darf er, damit das Wort 0^q1^p verworfen wird, von R mit 1^p nicht im akzeptierenden Zustand enden, was einen Widerspruch darstellt.