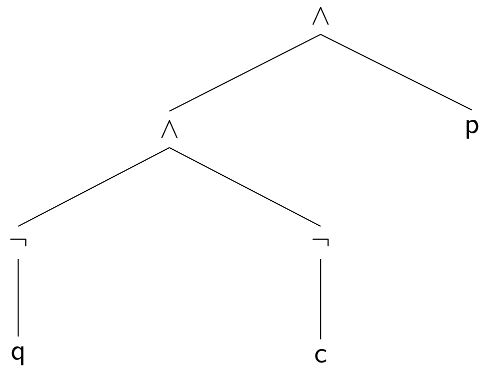
Einführung in die Theoretische Informatik — LVA 703062
Lösungen zum 2. SL-Blatt für den 17. März 2023 — IFI

---

1) *Lösung.* Aussagenlogische Formeln werden im Skript in Definition 2.1 definiert.

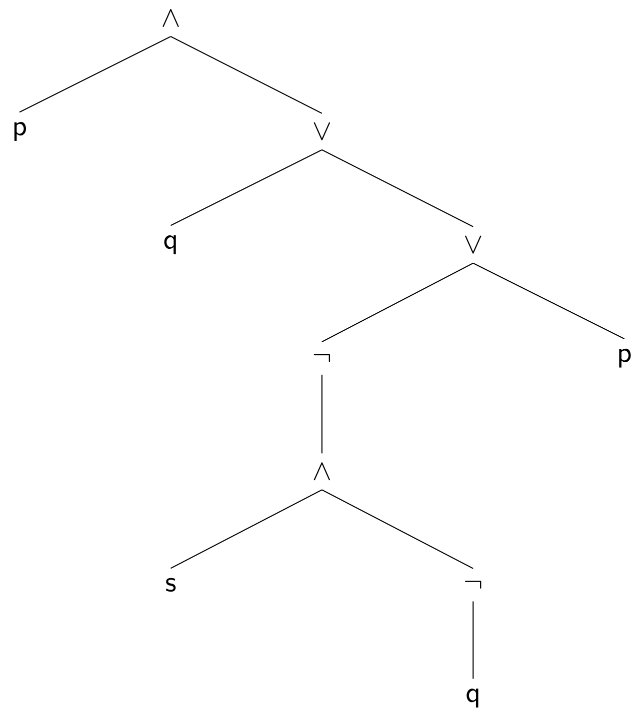
   a) Betrachten Sie die Formel A, sodass $\bar{\mathsf{v}}(A) = \mathsf{F}$ und $\mathsf{v}(\mathsf{p}) = \mathsf{T}$, $\mathsf{v}(\mathsf{q}) = \mathsf{F}$, $\mathsf{v}(\mathsf{c}) = \mathsf{T}$ gelten soll. Wir reparieren die Formel wie folgt:

$$A' := (\neg\mathsf{q} \land \neg\mathsf{c}) \land \mathsf{p} \; .$$



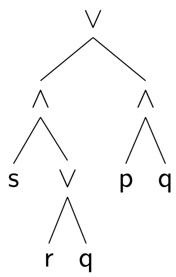
   b) Betrachten Sie die Formel B, sodass $\bar{\mathsf{v}}(B) = \mathsf{T}$ und $\mathsf{v}(\mathsf{p}) = \mathsf{T}$, $\mathsf{v}(\mathsf{q}) = \mathsf{F}$, $\mathsf{v}(\mathsf{s}) = \mathsf{T}$ gelten soll. Wir reparieren die Formel wie folgt:

$$B' := \mathsf{p} \land (\mathsf{q} \lor (\neg(s \land \neg q) \lor p)) \; .$$



c) Betrachten Sie die Formel C, sodass $\bar{\mathsf{v}}(C) = \mathsf{F}$ und $\mathsf{v}(\mathsf{p}) = \mathsf{T}$, $\mathsf{v}(\mathsf{q}) = \mathsf{F}$, $\mathsf{v}(\mathsf{r}) = \mathsf{F}$, $\mathsf{v}(\mathsf{s}) = \mathsf{T}$ gelten soll. Die Formel muss nicht repariert werden, wir geben also den Syntaxbaum der ursprünglichen Formel an:

$$C := (\mathsf{s} \wedge (\mathsf{r} \vee \mathsf{q})) \vee (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \ .$$



□

2) *Lösung.*

a)

$$\begin{aligned}\neg(B \wedge (A \wedge \neg C)) &\approx \neg B \vee \neg A \vee \neg\neg C\\ &\approx \neg B \vee \neg A \vee C\\ &\approx \neg A \vee (\neg B \vee C)\\ &\approx \neg A \vee (B \to C)\\ &\approx A \to (B \to C)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\neg(A \to \neg B) &\approx \neg(\neg A \vee \neg B)\\ &\approx \neg\neg A \wedge \neg\neg B\\ &\approx A \wedge B\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\neg(A \to (B \wedge C)) \to (\neg A \vee (B \wedge C)) &\approx \neg(\neg A \vee (B \wedge C)) \to (\neg A \vee (B \wedge C))\\ &\approx \neg\neg(\neg A \vee (B \wedge C)) \vee (\neg A \vee (B \wedge C))\\ &\approx (\neg A \vee (B \wedge C)) \vee (\neg A \vee (B \wedge C))\\ &\approx \neg A \vee (B \wedge C)\\ &\approx (B \wedge C) \vee \neg A\\ &\approx \neg\neg(B \wedge C) \vee \neg A\\ &\approx \neg(\neg B \vee \neg C) \vee \neg A\\ &\approx \neg(B \to \neg C) \vee \neg A\\ &\approx (B \to \neg C) \to \neg A\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&((A \wedge B) \vee \neg A \vee \neg B) \to ((C \vee (\neg(A \wedge C) \wedge C)) \wedge \neg C)\\ &\approx ((A \wedge B) \vee \neg A \vee \neg B) \to ((C \vee (C \wedge \neg(A \wedge C))) \wedge \neg C)\\ &\approx ((A \wedge B) \vee \neg A \vee \neg B) \to (C \wedge \neg C)\\ &\approx ((A \wedge B) \vee \neg A \vee \neg B) \to \mathsf{False}\\ &\approx ((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)) \to \mathsf{False}\\ &\approx \mathsf{True} \to \mathsf{False}\\ &\approx \mathsf{False}\end{aligned}$$

$\square$

3) *Lösung.* – Basisfall $n \to 0$:

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$$

– Induktionsschritt $n \to n+1$:
Die Induktionshypothese (IH) können wir annehmen:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Nun zeigen wir den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&\overset{\text{IH}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+1+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1
\end{aligned}$$

$\square$