1) *Lösung.*

1	$p \to q$	Annahme
2	$\neg q$	Annahme
3	p	Annahme
4	q	$\to$: e 3,1
5	False	$\neg$: e 4,2
6	$\neg p$	$\neg$: i 3-5
7	$\neg q \to \neg p$	$\to$: i 2-6
8	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	$\to$: i 1-7

□

2) *Lösung.*
KNF a)

$$\begin{aligned}\neg(p \to \neg(q \vee r)) &\equiv \neg(\neg p \vee \neg(q \vee r)) \\ &\equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg(q \vee r) \\ &\equiv p \wedge (q \vee r)\end{aligned}$$

Eine Anwendung des Distributivgesetzes führt zur DNF:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

DNF b)

$$\begin{aligned}\neg(\neg((q \wedge r) \to p) \vee \neg p) &\equiv \neg(\neg(\neg(q \wedge r) \vee p) \vee \neg p) \\ &\equiv \neg\neg((\neg q \wedge r) \vee p) \wedge \neg\neg p \\ &\equiv ((\neg q \wedge r) \vee p) \wedge p \\ &\equiv (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge \neg q \wedge r) \vee p \\ &\equiv p\end{aligned}$$

KNF b) Entweder direkt von DNF (p) oder auch ersichtlich durch Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q \wedge r) \vee p &\equiv (p \vee p) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \\ &\equiv p\end{aligned}$$

KNF c)

$$
\begin{aligned}
((p \to q) \land q \to p) \land (\neg q \lor \neg r) &\equiv ((\neg p \lor q) \land q \to p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv (\neg((\neg p \lor q) \land q) \lor p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv ((\neg(\neg p \lor q) \lor \neg q) \lor p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv (((p \land \neg q) \lor \neg q) \lor p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv (((p \lor \neg q) \land \neg q) \lor p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv (p \lor \neg q \lor p) \land (\neg q \lor p) \land (\neg q \lor \neg r) \\
&\equiv (p \lor \neg q) \land (\neg q \lor \neg r)
\end{aligned}
$$

per Distributivgesetz wieder zur DNF:

$$
\begin{aligned}
(p \lor \neg q) \land (\neg q \lor \neg r) &\equiv (p \land (\neg q \lor \neg r)) \lor (\neg q \land (\neg q \lor \neg r)) \\
&\equiv (p \land \neg q) \lor (p \land \neg r) \lor \neg q \lor (\neg q \land \neg r)
\end{aligned}
$$

$\square$

3)
- Halbgruppe (Semigroup):

  Anforderungen an $\mathcal{A}_1 = \{A, \circ\}$:

  - $\circ$ ist assoziativ

  $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, +\}$ $\square$

- Monoid (Monoid):

  Anforderungen an $\mathcal{A}_2 = \{A, \circ, 1\}$:

  - $\mathcal{A}_2$ ist Halbgruppe
  - 1 ist neutrales Element bzgl. $\circ$

  $\mathcal{A}_2 = \{\mathbb{N}, +, 0\}$ $\square$

- Gruppe (Group):

  Anforderungen an $\mathcal{A}_3 = \{A, \circ, 1\}$:

  - $\mathcal{A}_3$ ist Monoid
  - Für jedes Element in $\mathcal{A}_3$ existiert ein Inverses

  $\mathcal{A}_3 = \{\mathbb{Z}, +, 0\}$ $\square$

- Ring (Ring):

  Anforderungen an $\mathcal{A}_4 = \{A, +, \cdot, 0, 1\}$:

  - $\{A, +, 0\}$ ist kommutative Gruppe

- $\{A, \cdot, 1\}$ ist Monoid
- $\cdot$ distributiert über $+$

$\mathcal{A}_4 = \{\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1\}$ $\square$

– Körper (Field):

Anforderungen an $\mathcal{A}_5 = \{A, +, \cdot, 0, 1\}$:

- $\mathcal{A}_5$ ist Ring
- $\{A, \cdot, 1\}$ ist kommutative Gruppe

$\mathcal{A}_5 = \{\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1\}$ $\square$