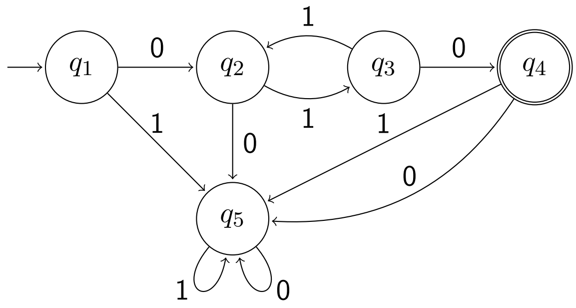
1) *Lösung.* Wir konstruieren den Automaten A, sodass $L = \mathsf{L}(A)$.



Einen DEA können wir im Allgemeinen in eine rechtslineare Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ transformieren, indem wir für jede Kante (p, a, q) des Automaten A eine Regel $P \to aQ$ in der Grammatik erzeugen, wobei $P, Q \in V$ und $a \in \Sigma$. Dabei ist folgendes zu beachten:

- Wenn p oder q ein Startzustand ist, so ist P oder Q das Startsymbol von G.
- Wenn q ein akzeptierender Zustand ist, fügen wir $Q \to \epsilon$ zu unseren Regeln hinzu.
- Das Eingabealphabet Σ von A ist das Alphabet Σ von G.
- Alle Kanten, die zu Zustände führen, von denen nie ein akzeptierender Zustand erreicht werden kann, können weggelassen werden.

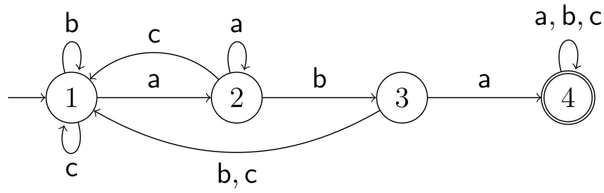
Umgekehrt können wir auch aus einer rechtslinearen Grammatik G (unter gewissen Voraussetzungen) einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ generieren, indem wir für jede Regel $P \to axQ$, wobei $P, Q \in V$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$ die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}(p, xa) = q$ definieren. Dabei ist folgendes zu beachten:

- Wenn P das Startsymbol ist, so ist p der Startzustand von A.
- Wenn Q leer ist, so ist q ein akzeptierender Zustand.
- Das Alphabet Σ von G ist das Eingabealphabet Σ von A.
- Für jedes unbekannte $\delta(q_1, a)$ generieren wir einen neuen Zustand $q_2 \in Q$ sodass $\delta(q_1, a) = q_2$ gilt.
- Alle nicht definierten kannten gehen zu einem neuen Zustand $r \in Q$.

Hinweis: Beachten Sie, dass im Allgemeinen die Konstruktion des Automaten aus einer (rechtslinearen) Grammatik einen sogenannten *nichtdeterministischen endlichen*

Automaten (*NEA*)[1] generiert. Wir schränken uns aber auf solche Grammatiken ein, bei denen die resultierende Übergangsfunktion δ wohldefiniert ist. □

2) *Lösung.* Sei A der folgende DEA:



Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(1,\epsilon) &= 1 \notin F \\
\hat{\delta}(1,\mathsf{cabab}) &= \delta(\hat{\delta}(1,\mathsf{caba}),\mathsf{b}) = \delta(\delta(\hat{\delta}(1,\mathsf{cab}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(1,\mathsf{ca}),\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(1,\mathsf{c}),\mathsf{a}),\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(1,\epsilon),\mathsf{c}),\mathsf{a}),\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(1,\mathsf{c}),\mathsf{a}),\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \delta(\delta(\delta(\delta(1,\mathsf{a}),\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) \\
&= \delta(\delta(\delta(2,\mathsf{b}),\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \delta(\delta(3,\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \delta(4,\mathsf{b}) = 4 \in F \\
\hat{\delta}(1,\mathsf{babca}) &= \cdots = 2 \notin F\ .
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\mathsf{cabab} \in \mathsf{L}(M)$ und $\epsilon, \mathsf{babca} \notin \mathsf{L}(M)$.

□

3) *Lösung.*

a) Wir zeigen zuerst, dass $CB^m \Rightarrow^* B^mC$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Der Basisfall $m = 0$ ist trivial, es gilt $CB^m = C = B^mC$. Im Schrittfall nehmen wir an, dass per Induktionshypothese $CB^m \Rightarrow^* B^mC$ gilt. Der Schrittfall folgt da

$$
\begin{aligned}
CB^{m+1} &= CBB^m \\
&\Rightarrow^* BCB^m && \text{da } CB \Rightarrow HB \Rightarrow HC \Rightarrow BC \\
&\Rightarrow^* BB^mC && \text{durch Induktionshypothese} \\
&= B^{m+1}C\ .
\end{aligned}
$$

Wir zeigen nun $(BC)^n \Rightarrow^* B^nC^n$. Die Fälle n gleich 1 oder 2 sind einfach zu

[1] Siehe `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nichtdeterministischer_endlicher_Automat&oldid=213285292`.

zeigen. Wir zeigen den Schrittfall für $n \geqslant 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(BC)^{n+2} &= BCBC(BC)^n \\
&\Rightarrow BCBCB^nC^n && \text{Induktionshypothese} \\
&\Rightarrow BBCCB^nC^n && \text{weil } CB \Rightarrow^* BC\text{, wie oben} \\
&\Rightarrow BBCB^nCC^n && \text{Hilfssatz} \\
&\Rightarrow BBB^nCCC^n && \text{Hilfssatz} \\
&= B^{n+2}C^{n+2}\,.
\end{aligned}$$

□

b) Sei $n \geqslant 1$ beliebig. Mittels einer einfachen Induktion lässt sich zeigen, dass folgende Ableitungen gelten:

$$S \Rightarrow^n \mathsf{a}^n(BC)^n \tag{1}$$

$$\mathsf{a}B^n \Rightarrow^n \mathsf{ab}^n \tag{2}$$

$$\mathsf{b}C^n \Rightarrow^n \mathsf{bc}^n\,. \tag{3}$$

Es folgt daher

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow^* \mathsf{a}^n(BC)^n && \text{aus (1)} \\
&\Rightarrow^* \mathsf{a}^nB^nC^n && \text{Aufgabe } (a) \\
&\Rightarrow^* \mathsf{a}^n\mathsf{b}^nC^n && \text{aus (2), weil } n \geqslant 1 \\
&\Rightarrow^* \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n && \text{aus (3), weil } n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

□