Advanced Topics in Term Rewriting
LVA 703610

`http://cl-informatik.uibk.ac.at/teaching/ws06/attr/`

Georg Moser

office hours: Tuesday, 16:00–18:00 (3M09)

Dependency Pairs - Example

rewrite rules

$$\begin{aligned} 0 - y &\to 0 \\ x - 0 &\to x \\ \mathsf{S}(x) - \mathsf{S}(y) &\to x - y \\ 0 \div \mathsf{S}(y) &\to 0 \\ \mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y) &\to \mathsf{S}((x - y) \div \mathsf{S}(y)) \end{aligned}$$

dependency pairs

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(x) -^\sharp \mathsf{S}(y) &\to x -^\sharp y \\ \mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) &\to (x - y) \div^\sharp \mathsf{S}(y) \\ \mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) &\to x -^\sharp y \end{aligned}$$

LPO ?

simplify constraints by using argument filtering

Definition

- argument filtering is mapping π such that for every n-ary function symbol $f \in \mathcal{F}^\sharp$ one of following alternatives holds:
  1. $\pi(f) = i$ with $i \in \{1, \dots, n\}$
  2. $\pi(f) = [i_1, \dots, i_m]$ with $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n$
- $$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \text{ is variable} \\ \pi(t_i) & \text{if } t = f(t_1, \dots, t_n) \text{ and } \boxed{1} \\ f(\pi(t_{i_1}), \dots, \pi(t_{i_m})) & \text{if } t = f(t_1, \dots, t_n) \text{ and } \boxed{2} \end{cases}$$

Theorem

TRS $\mathcal{R}$ is terminating if $\exists$ argument filtering π, $\exists$ reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

1. $\pi(l) \succsim \pi(r) \quad \forall\, l \to r \in \mathcal{R}$
2. $\pi(l) \succ \pi(r) \quad \forall\, l \to r \in \mathsf{DP}(\mathcal{R})$

Example - revisited

rewrite rules

$$\begin{aligned} 0 - y &\to 0 \\ x - 0 &\to x \\ \mathsf{S}(x) - \mathsf{S}(y) &\to x - y \\ 0 \div \mathsf{S}(y) &\to 0 \\ \mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y) &\to \mathsf{S}((x - y) \div \mathsf{S}(y)) \end{aligned}$$

dependency pairs

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(x) -^\sharp \mathsf{S}(y) &\to x -^\sharp y \\ \mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) &\to (x - y) \div^\sharp \mathsf{S}(y) \\ \mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) &\to x -^\sharp y \end{aligned}$$

argument filtering $\pi(-) = 1$

LPO $\div > \mathsf{S}$ $\quad \div^\sharp > -^\sharp$

Simplified Constraints

constraints $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
0 &>_{\mathsf{lpo}} 0\\
x &>_{\mathsf{lpo}} x\\
\mathsf{S}(x) &>_{\mathsf{lpo}} x\\
0 \div \mathsf{S}(y) &>_{\mathsf{lpo}} 0\\
\mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y) &>_{\mathsf{lpo}} \mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y)
\end{aligned}$$

constraints $\mathsf{DP}(\mathcal{R})$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(x) -^{\sharp} \mathsf{S}(y) &>_{\mathsf{lpo}} x -^{\sharp} y\\
\mathsf{S}(x) \div^{\sharp} \mathsf{S}(y) &>_{\mathsf{lpo}} x \div^{\sharp} \mathsf{S}(y)\\
\mathsf{S}(x) \div^{\sharp} \mathsf{S}(y) &>_{\mathsf{lpo}} x -^{\sharp} y
\end{aligned}$$

reduction pair $(\geq_{\mathsf{lpo}}, >_{\mathsf{lpo}})$

Example - extended

rewrite rules

$$\begin{aligned}
0 - y &\to 0\\
x - 0 &\to x\\
\mathsf{S}(x) - \mathsf{S}(y) &\to x - y\\
0 \div \mathsf{S}(y) &\to 0\\
\mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y) &\to \mathsf{S}((x - y) \div \mathsf{S}(y))\\
0 + y &\to y\\
\mathsf{S}(x) + y &\to \mathsf{S}(x + y)\\
(x - y) - z &\to x - (y + z)
\end{aligned}$$

dependency pairs

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(x) -^{\sharp} \mathsf{S}(y) &\to x -^{\sharp} y\\
\mathsf{S}(x) \div^{\sharp} \mathsf{S}(y) &\to (x - y) \div^{\sharp} \mathsf{S}(y)\\
\mathsf{S}(x) \div^{\sharp} \mathsf{S}(y) &\to x -^{\sharp} y\\
\mathsf{S}(x) +^{\sharp} y &\to x +^{\sharp} y\\
(x - y) -^{\sharp} z &\to x -^{\sharp} (y + z)\\
(x - y) -^{\sharp} z &\to y +^{\sharp} z
\end{aligned}$$

Dependency Pairs - revisited

Corollary

$\forall$ non-terminating TRS $\mathcal{R}$ $\exists$ infinite rewrite sequence

$$\mathcal{T}^{\sharp}_{\infty} \ni t_1 \to^{*}_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathsf{DP}(\mathcal{R})} t_3 \to^{*}_{\mathcal{R}} t_4 \to_{\mathsf{DP}(\mathcal{R})} \cdots$$

Assumption

all TRSs are finite

Lemma

$\forall$ non-terminating TRS $\mathcal{R}$ $\exists$ infinite rewrite sequence

$$\mathcal{T}^{\sharp}_{\infty} \ni t_1 \to^{*}_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{C}} t_3 \to^{*}_{\mathcal{R}} t_4 \to_{\mathcal{C}} \cdots \qquad \mathcal{C}\text{-minimal}$$

where all dependency pairs in $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{DP}(\mathcal{R})$ are used infinitely often

Definition

dependency graph $\mathsf{DG}(\mathcal{R})$

nodes: $\boxed{l \to r}$ for every $(l \to r) \in \mathsf{DP}(\mathcal{R})$

arrows: $\boxed{l_1 \to r_1} \longrightarrow \boxed{l_2 \to r_2}$

if $\exists$ substitutions σ, τ such that $r_1\sigma \to^{*}_{\mathcal{R}} l_2\tau$

Theorem

TRS $\mathcal{R}$ is terminating if

$\forall$ cycle $\mathcal{C} \in \mathsf{DG}(\mathcal{R})$ $\quad \neg\,\exists\, \mathcal{C}$ – minimal rewrite sequence

Remark

dependency graph is not computable in general, but good approximations exist rewrite rules

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
0 - y & \to & 0 & \mathsf{S}(x) \div \mathsf{S}(y) & \to & \mathsf{S}((x - y) \div \mathsf{S}(y)) \\
x - 0 & \to & x & 0 + y & \to & y \\
\mathsf{S}(x) - \mathsf{S}(y) & \to & x - y & \mathsf{S}(x) + y & \to & \mathsf{S}(x + y) \\
0 \div \mathsf{S}(y) & \to & 0 & (x - y) - z & \to & x - (y + z)
\end{array}
$$

dependency pairs

① $\mathsf{S}(x) -^\sharp \mathsf{S}(y) \to x -^\sharp y$

② $\mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) \to (x - y) \div^\sharp \mathsf{S}(y)$

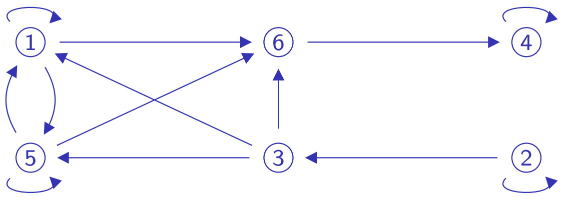
③ $\mathsf{S}(x) \div^\sharp \mathsf{S}(y) \to x -^\sharp y$

④ $\mathsf{S}(x) +^\sharp y \to x +^\sharp y$

⑤ $(x - y) -^\sharp z \to x -^\sharp (y + z)$

⑥ $(x - y) -^\sharp z \to y +^\sharp z$

dependency graph



5 cycles {①}, {③}, {④}, {⑤}, {①, ⑤}