1. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist falsch?

A. Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

B. Für jede Sprache L, die von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert wird, exisitert eine TM die L akzeptiert.

C. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar.

E. Jede TM kann in einen äquivalenten endlichen Automaten umgewandelt werden.

---

2. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist falsch? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

B. $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid 0A$$
$$A \to 0S$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \overline{}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(a+b) = \overline{a}$.

B. Für alle $a, b \in B$ gilt $\overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a}$.

C. $\langle B; +, 0\rangle$ ist eine kommutative Gruppe.

D. Für alle $a \in B$ gilt $a + \overline{a} = 0$.

E. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 0$ und $ab = 1$, dann $b = \overline{a}$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + \overline{a}b = a + b$.

---

5. Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formeln A ist richtig?

A. Jede disjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Atomen.

B. Jede konjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

C. Jede Formel A besitzt eine disjunktive, nicht jedoch eine konjunktive Normalform.

D. Jede Formel A besitzt eine konjunktive, nicht jedoch eine disjunktive Normalform.

E. Jede Formel A besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.

---

6. Welche der folgenden Aussagen zur Aussagenlogik ist richtig?

A. Es existiert eine Wahrheitsfunktion f, sodass f nicht durch eine Wahrheitstabelle ausgedrückt werden kann.

B. Es gelten die Gesetze von de Morgan, das heißt: $\neg(E \land F) \approx \neg E \land \neg F$

C. Es gilt die logische Äquivalenz: $A \lor \mathsf{True} \approx A$

D. Eine Formel A ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ erfüllbar ist.

E. Die Aussagenlogik ist vollständig axiomatisierbar, das heißt es existiert ein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Aussagenlogik.

---

7. Aussagenlogik: Betrachten Sie die aussagenlogische Formel A:

$$p \to ((q \to (r \to s)) \lor (s \to (r \to q)))$$

a) Betrachten Sie die Belegung $\mathsf{v}(p) = \mathsf{v}(r) = \mathsf{F}$, $\mathsf{v}(q) = \mathsf{v}(s) = \mathsf{T}$. Begründen Sie (formell oder informell), warum $\overline{\mathsf{v}}(A) = \mathsf{T}$ gilt. `[6 Punkte]`

b) Zeigen Sie, dass A eine Tautologie ist. Verwenden Sie dazu die Methode von Quine. `[10 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra mit der Trägermenge B. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in B$ das folgende Gesetz gilt:

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b} \ .$$

Dazu genügt es zu zeigen, dass (i) $(a \cdot b) + (\overline{a} + \overline{b}) = 1$ und (ii) $(a \cdot b) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0$ gilt.

a) Zeigen Sie (i). `[8 Punkte]`

b) Zeigen Sie (ii). `[8 Punkte]`

Hinweis: In den Beweisen genügt es Definitionsgesetze der Boolschen Algebra zu verwenden.

---

9. Berechenbarkeitstheorie: Gegeben sei die folgende Turingmaschine

$$M = (\{s, p, q, u, t, r\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup, \vdash\}, \sqcup, \vdash, \delta, s, t, r)$$

wobei die Übergangsfunktion wie folgt definiert ist:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$	p	$\sqcup$	$(q, \sqcup, L)$
s	$\sqcup$	$(t, \sqcup, R)$	q	b	$(u, \sqcup, L)$
s	a	$(p, \vdash, R)$	u	b	(u, b, L)
p	a	(p, a, R)	u	a	(u, a, L)
p	b	(p, b, R)	u	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$

a) Sind die Wörter ϵ bzw. aabb in der Sprache von M? `[4 Punkte]`

b) Gegeben sei die Startkonfiguration $(s, \vdash \mathsf{abb}\sqcup^\omega, 0)$. Führen Sie so lange wie möglich Rechenschritte mit der Rechenschrittrelation (für einen Schritt) auf Turingmaschinen aus und geben Sie die Sequenz der Konfigurationen an. `[6 Punkte]`

c) Welche Sprache beschreibt M? `[6 Punkte]`

---

10. Verifikation: Betrachen Sie das folgende `while`-Programm P für eine Registermaschine.

$$x_1 := x_1 + 1; x_1 := x_1 - 1$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Hoare-Kalküls, dass der Wert des Registers x_1 vor und nach der Ausführung von P ident ist. Dazu:

a) Formulieren Sie ein geeignetes Hoare-Tripel. Nehmen Sie dazu an, dass der Wert von x_1 vor der Ausführung durch die Konstante c ausgedrückt wird. `[4 Punkte]`

b) Wenden Sie die Regeln des Hoare-Kalküls an, um die Korrektheit des in a) formulierten Tripels zu zeigen. `[8 Punkte]`

c) Warum kann diese Eigenschaft für das Programm P': $x_1 := x_1 - 1; x_1 := x_1 + 1$ nicht gezeigt werden?

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Semantik der Registermaschine und finden Sie einen Wert c, für den die Eigenschaft nicht gilt. `[4 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “version2”

```
Version 1:  E  E  E  F  E  E
```